Логика описания понятий (дескрипционная логика)

Эта логика (точнее, обширное семейство логик) предназначается для записи знаний о некоторых «терминах» или «понятиях». Каждый термин обозначает некоторое *множество* объектов. Простейшее знание — одно понятие содержится в другом или совпадает с ним. Например,

$$\begin{gathered}\mathsf{Фрукт} \subseteq \mathsf{Растение},\\ \mathsf{Лошадь} \subseteq \mathsf{Парнокопытное},\\ \mathsf{Парнокопытное} \subseteq \mathsf{Животное},\\ \mathsf{Бегемот} \equiv \mathsf{Гиппопотам}.\end{gathered}$$

Классичейкий пример — классификация Линнея живых организмов. Более сложные утверждения можно записывать, если разрешить использовать новые способы построения понятий из исходных понятий, например, пересечение, объединение, дополнение. Например:

$$\begin{gathered}\mathsf{Мужчина} \cup \mathsf{Женщина} \equiv \mathsf{Человек},\\ \mathsf{Мужчина} \subseteq \neg\mathsf{Женщина}.\end{gathered}$$

Оказываются полезными и более сложные способы построения новых понятий из старых, с использованием двуместных *отношений* между объектами.

Важнейшая практическая задача: дан некоторый набор знаний про интересующие нас термины; требуется выяснить, следует ли из них определенное утверждение. Например, из вышеприведенных знаний следует, что $\mathsf{Лошадь} \subseteq \mathsf{Животное}$, $\mathsf{Мужчина} \subseteq \mathsf{Человек}$, и не следует, что $\mathsf{Человек} \subseteq \mathsf{Женщина}$ (почему?). Чтобы заниматься этой задачей, нужно дать точное определение того, что значит из некоторого конечного множества утверждений следует некоторое утверждение; а затем выяснить, есть ли для данного понятия логического следования алгоритм, выясняющий, да, следует, или нет, не следует; и сколько операций и какой объем памяти требуется этому алгоритму. Этим кругом вопросов и занимается *логика описания понятий* или (английский термин) *дескрипционная логика* (description logic). Кроме того, выясняется, что она тесно связана с модальной логикой.

Задача 1: из нескольких включений терминов следует включение терминов

Дано некоторое конечное количество «терминов», или, фактически, переменных: $\{X_1, \ldots, X_n\} = \mathsf{Var}$. Из них разрешается составлять *утверждения* следующего вида (*включения*): $X_i \subseteq X_j$. Произвольный конечный набор таких утверждений будем обозначать буквой Γ и называть *теорией* или (как принято в этой науке) *онтологией.*

Вопрос: как узнать, что из данной онтологии Γ *следует* некоторое утверждение $X \subseteq Y$? (Здесь $X, Y \in \mathsf{Var}$.) То есть при всех «приписываниях» произвольных множеств переменным X_i справедливо следующее: если все включения из Γ оказались верными, то и включение $X \subseteq Y$ тоже верно.

Задача 1a. Дана онтология $\Gamma = \{X \subseteq Y, Y \subseteq V, X \subseteq Z, Z \subseteq V\}$. Следует ли из Γ утверждение $X \subseteq V$? $Y \subseteq Z$? $Y \subseteq X$? В случае отрицательного ответа предъявите «контрмодель» — приписывание переменным некоторых множеств, при котором все утверждения из Γ оказываются истинными, а проверяемое утверждение — ложным. Множеств какой мощности достаточно, чтобы всегда иметь возможность построить контрпример?

Формализуем понятие «приписывание множеств переменным» и с его помощью дадим формальное определение логического следования утверждения из набора утверждений.

Семантика: *модель* — это $M = (W, I)$, где $W \neq \varnothing$ — произвольное множество; $I \colon \mathsf{Var} \to 2^W$ — «интерпретирующая» функция, она приписывает каждой переменной X_k подмножество $I(X_k) \subseteq W$.

Мы пишем $M \models X \subseteq Y$, если $I(X) \subseteq I(Y)$; читаем: в модели M *истинно* включение $X \subseteq Y$.

Пишем $M \models \Gamma$, если в M истинны все включения, имеющиеся в Γ.

Наконец, пишем $\Gamma \models X \subseteq Y$ (говорим: из Γ *следует* включение $X \subseteq Y$), если в каждой модели M, в которой истинно Γ, истинно и включение $X \subseteq Y$; то есть если $M \models \Gamma$, то $M \models X \subseteq Y$.

Мы готовы точно сформулировать наш вопрос:

Задача 1b: Придумайте алгоритм, который по онтологии Γ и включению $X \subseteq Y$ проверяет, что $\Gamma \models X \subseteq Y$.

Описав алгоритм, докажите, что он действительно решает данную задачу, то есть на входных данных Γ, X, Y он выдает ответ «Да» тогда и только тогда, когда $\Gamma \models X \subseteq Y$.

Попутные вопросы: следуя буквально определению, для того, чтобы проверить это следование, нужно перебирать *всевозможные* множества W (и всевозможные приписывания его подмножеств переменным X_i). Какой мощности множеств W хватит? Хватит ли хотя бы счетных? а конечных? какой мощности конечных?

Задача 2: из нескольких включений выражений следует включение выражений

Имеем те же переменные $X_1, \ldots, X_n$. Из них можем составлять *выражения* с помощью $\cap, \cup, \neg$. *Онтологией* Γ теперь будем называть всякий конечный набор включений $A \subseteq B$, где A, B — произвольные выражения.

Семантика — очевидна: $I(\neg A) = W \setminus I(A)$, $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$ и аналогично для $\cup$.

Включение $A \subseteq B$ называем *общезначимым*, если $I(A) \subseteq I(B)$ для всех моделей $M = (W, I)$.

Логическое следование $\Gamma \models A \subseteq B$ (из набора включений Γ следует $A \subseteq B$) определяется как раньше.

Основной вопрос — точно тот же: как алгоритмически проверять $\Gamma \models A \subseteq B$?

Задача 2a. Даны следующие соотношения (будем называть их *аксиомами*):

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \mathsf{Animal} = \mathsf{Male} \cup \mathsf{Female}, & (5) & \mathsf{Woman} = \mathsf{Human} \cap \mathsf{Female}, \\
(2) & \mathsf{Male} \cap \mathsf{Female} = \varnothing, & (6) & \mathsf{Father} \subseteq \mathsf{Man}, \\
(3) & \mathsf{Human} \subseteq \mathsf{Animal}, & (7) & \mathsf{Mother} \subseteq \mathsf{Woman}, \\
(4) & \mathsf{Man} = \mathsf{Human} \cap \mathsf{Male}, & (8) & \mathsf{Parent} = \mathsf{Father} \cup \mathsf{Mother}.
\end{array}
$$

Интуитивно, эти утверждения читаются так: животные состоят из особей мужского и женского пола (1), причем последние не пересекаются (2); люди являются животными (3); мужчина — это человек мужского пола (4); женщина — человек женского пола (5); отцы являются мужчинами (6), матери — женщинами (7); родитель — это отец или мать (8).

Требуется выяснить, следуют ли из данных аксиом следующие соотношения:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \mathsf{Human} = \mathsf{Man} \cup \mathsf{Woman}, & (e) & \mathsf{Parent} \subseteq \mathsf{Human}, \\
(b) & \mathsf{Woman} = \mathsf{Human} \cap \neg\mathsf{Male}, & (f) & \mathsf{Mother} \subseteq \mathsf{Male}, \\
(c) & \mathsf{Father} \subseteq \mathsf{Male}, & (g) & \mathsf{Mother} = \mathsf{Woman}, \\
(d) & \mathsf{Father} \cap \mathsf{Mother} = \varnothing, & (h) & \mathsf{Woman} = \mathsf{Human}.
\end{array}
$$

Задача 2b. Какие из включений (a)–(h) будут следовать, если к исходным аксиомам добавить: $\mathsf{Male} = \varnothing$?

Задача 2c. Покажите, что задача проверки $\Gamma \models A \subseteq B$ *алгоритмически сводится* к задаче проверки общезначимости включений $A' \subseteq B'$.

Более точно: опишите алгоритм (желательно, требующий мало времени), который преобразует произвольную онтологию Γ и выражения A и B в некоторые выражения A' и B' так, что верна следующая эквивалентность:

$$\Gamma \models A \subseteq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{включение } A' \subseteq B' \text{ общезначимо.}$$

Задача 2d. Придумайте алгоритм, который по онтологии Γ и двум выражениям A, B проверяет, что $\Gamma \models A \subseteq B$. Докажите, что он в точности решает данную задачу.

Множеств W какой мощности достаточно, чтобы всегда, когда из Γ не следует $A \subseteq B$, можно было найти множество не больше данной мощности, на котором можно построить «контрмодель»? Хватит счетных? конечных? сколько элементов достаточно?