

Игры Эренфойхта

Игра Эренфойхта на графах. Пусть даны два неориентированных графа G и H без кратных рёбер. Играют двое: Новатор и Консерватор. Сначала Новатор выбирает число *раундов* k . Каждый раунд начинается с Новатора. В начале i -го раунда он выбирает один из графов и отмечает в нём вершину числом i (вершины могут повторяться). В ответ на это Консерватор должен выбрать вершину в другом графе и также отметить её числом i . Игра длится k раундов. В конце игры в графе G отмечены вершины a_1, a_2, \dots, a_k , в графе H — b_1, \dots, b_k (возможно, с совпадениями). Консерватор выигрывает, если выполнены следующие два условия:

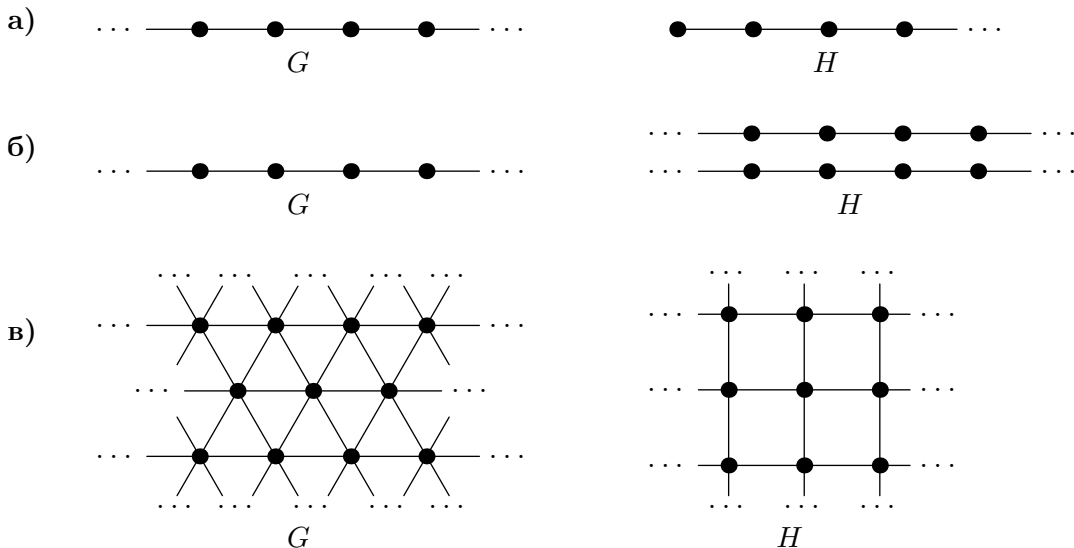
1. вершины a_i и a_j совпадают тогда и только тогда, когда вершины b_i и b_j совпадают;
2. вершины a_i и a_j соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины b_i и b_j соединены ребром.

Иначе говоря, победа Консерватора означает, что соответствие $a_i \leftrightarrow b_i$ задаёт *частичный изоморфизм*, т.е. изоморфизм подграфов, индуцированных на множествах вершин $\{a_1, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, \dots, b_k\}$.

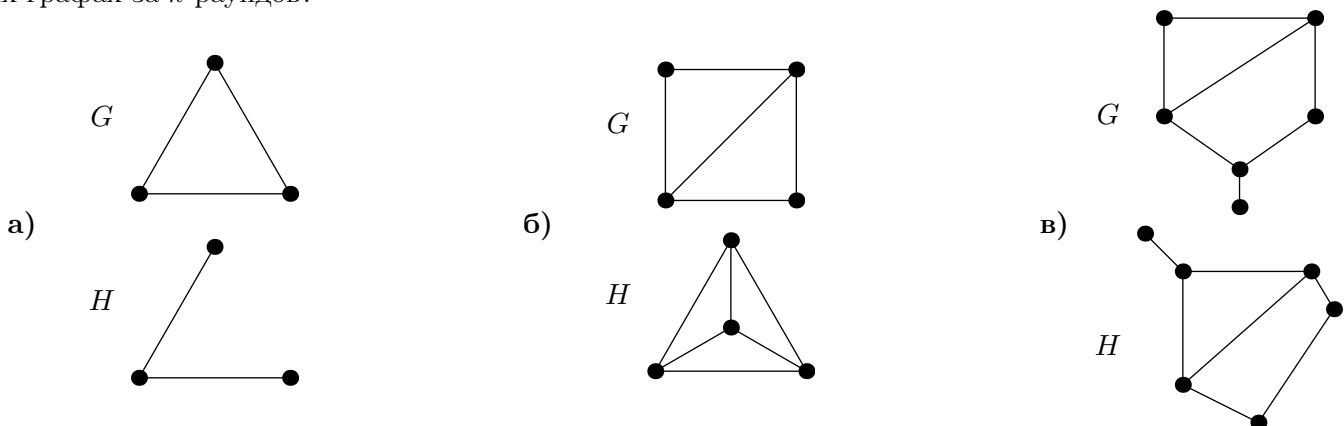
1. а) Докажите, что если G и H изоморфны, то у Консерватора есть выигрышная стратегия.

б) Докажите, что если графы G и H конечны, то верно и обратное.

2. На рисунке изображены два бесконечных графа. У какого из игроков есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на этих двух графах?



3. Для какого наименьшего k Новатор может гарантированно выиграть игру Эренфойхта на следующих графах за k раундов?



Вместо неориентированных графов для игр Эренфойхта можно рассматривать и ориентированные (все определения сохраняются). С точки зрения логики, ориентированный граф — это интерпретация сигнатуры с отношением равенства и ещё одним двуместным отношением R : $R(u, v)$ верно тогда и только тогда, когда из u в v ведёт дуга.

4. Определите, кто выигрывает в следующих играх Эренфойхта:

- а) на структурах $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$?
- б) на структурах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <)$?
- в) на структурах $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, <)$?
- д) на структурах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <)$?
- е) на структурах $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$?

5. Пусть дана формула φ сигнатуры Ω без свободных переменных. Докажите, что существует такое число k (зависящее только от φ), что если в одной интерпретации сигнатуры φ истинна, а в другой — ложна, то Новатор может гарантированно выиграть игру Эренфойхта на этих двух интерпретациях за k раундов. Как вычислить k , зная φ ?

6. Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же формулы (без свободных переменных). Докажите, что интерпретации A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в соответствующей игре Эренфойхта выигрывает Консерватор.

7. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{N}, \leq, y = x + 1)$ и $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ элементарно эквивалентны.
б) Выведите из этого, что для всякой формулы первого порядка $\phi(x)$ с одной свободной переменной в сигнатуре $(\leq, y = x + 1)$ и интерпретации \mathbb{N} множество тех n , на которых формула истинна, конечно или является дополнением конечного.

8. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ элементарно эквивалентны.

- б) Выведите из этого, что отношение \leq в \mathbb{Z} не выражается через отношение $y = x + 1$.
- в) Выражается ли отношение $y = x + 1$ через \leq ?
- г) Выражается ли отношение \leq через $y = x + 1$ в \mathbb{N} ?