Исчисление секвенций для логики высказываний

Формулы логики высказываний строятся из пропозициональных переменных (p, q, r, ...) с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина). Отрицание $\neg A$ понимается как сокращение для $(A \to \bot)$; равносильность $A \leftrightarrow B$ понимается как сокращение для $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Мы будем рассматривать *мультимножества* формул. Мультимножеством называется совокупность объектов, в которой не имеет значения их порядок, но учитывается *кратность* вхождения объекта. Так, $\{A, A, B\}$ и $\{A, B, A\}$ — это одно и то же мультимножество, а $\{C, C, D\}$ и $\{C, D, D\}$ — разные. При объединении мультимножеств кратности суммируются: $\{E, F, F, G\} \cup \{F, F, G, G\} = \{E, F, F, F, F, G, G, G\}$. Далее вместо знака объединения ($\cup$) будем использовать запятую; также будем опускать фигурные скобки в записи одноэлементного мультимножества $\{A\}$.

Секвенцией будем называть выражение $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — конечные мультимножества формул логики высказываний. Исчисление секвенций для классической логики высказываний задаётся следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы

$$\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, p \Rightarrow p, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta$$

Правила

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}$$

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *выводима,* если существует её вывод (доказательство), т.е. дерево, в вершинах которого стоят секвенции, причём в листьях — аксиомы, в корне — сама секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, а переход от предков к потомкам осуществляется по правилам вывода.

Говоря о выводимости отдельной формулы A, мы имеем в виду выводимость секвенции $\Rightarrow A$ (точнее, $\varnothing \Rightarrow \{A\}$) с пустой левой частью. При этом внутри вывода могут встречаться секвенции с непустой левой частью.

1. Постройте выводы следующих формул:

а) $(p \wedge q) \to p$, $\quad (p \wedge q) \to q$, $\quad p \to (q \to (p \wedge q))$;
б) $p \to (p \vee q)$, $\quad q \to (p \vee q)$, $\quad (p \to q) \vee (q \to p)$;
в) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$, $\quad (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$, $\quad p \leftrightarrow \neg\neg p$;
г) $((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$.

2. Какие из следующих формул выводимы, а какие нет? Почему?
а) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$; **б)** $(p \vee q) \to (p \wedge q)$; **в)** $(p \wedge (p \leftrightarrow q)) \to q$; **г)** $p \to \neg p$; **д)** $((p \vee (p \to q)) \to q) \to q$.

3. Верно ли, что для любой формулы A секвенция $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$ выводима?

4. Докажите следующие свойства исчисления секвенций:
а) *Свойство подформульности:* если какая-то формула встречается в выводе, то она является подформулой заключительной секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$.
б) Замкнутость относительно *правила ослабления:* если выводима секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, то выводима также секвенция $\Gamma, \Phi \Rightarrow \Psi, \Delta$ для произвольных мультимножеств Φ и Ψ.
в) Замкнутость относительно *подстановки:* если в выводимой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ заменить все вхождения переменной p на формулу A, то получится выводимая секвенция.

Набор значений (0 или 1) пропозициональных переменных, при котором все формулы из Γ истинны, а все формулы из Δ ложны, будем называть *контрпримером* к секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$. (Истинность или ложность формул определяется по таблицам истинности.)

5. Докажите, что в каждом из правил вывода нижняя секвенция имеет контрпример тогда и только тогда, когда хотя бы одна из верхних секвенций имеет контрпример.

6. *Корректность и полнота исчисления высказываний.*
а) Докажите, что секвенция не имеет контрпримера тогда и только тогда, когда она выводима в исчислении секвенций.
б) Докажите, что формула A выводима в исчислении секвенций тогда и только тогда, когда она истинна при всех значениях переменных *(общезначима).*

7. Докажите, что секвенция $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_k$ выводима тогда и только тогда, когда выводима формула $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \dots \vee B_k)$.

8. Докажите, что в нашем исчислении допустимо *правило сечения:* если в нём выводимы секвенции $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A$ и $A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$, то выводима секвенция $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$. (Частным случаем сечения является известное правило modus ponens: $\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$.)

9. Докажите, что все правила с одной верхней секвенцией *обратимы,* т.е. если выводима нижняя секвенция, то выводима и верхняя (само правило постулирует обратное).

10. Введём в язык новую связку $\multimap$ и добавим к нашему исчислению следующие правила:

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, B \multimap A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B \multimap A, \Delta}$$

Какой таблицей истинности должна обладать связка $\multimap$, чтобы получившееся исчисление было корректным и полным?

11. Добавим в наш язык **а)** связку $\leftrightarrow$ (не как сокращение, а как отдельную операцию); **б)** связку $\oplus$ (исключающее «или»: $A \oplus B$ значит „либо A, либо B“); **в)** произвольную n-арную связку, заданную таблицей истинности. Какими правилами нужно расширить исчисление секвенций, чтобы сохранить корректность, полноту и свойство подформульности?

12. Представьте, что теперь у нас три истинностных значения $\{0, 1, 2\}$. Секвенцией теперь будет тройка $\langle \Gamma, \Delta, \Theta \rangle$ из трёх конечных мультимножеств формул. Контрпримером к такой секвенции назовём набор значений переменных, при котором все формулы из Γ имеют значение 1, все формулы из Δ — значение 2, все формулы из Θ — значение 0.
а) Пусть в нашем языке единственными связками являются константы 0, 1, 2. Какие аксиомы должно содержать исчисление секвенций, чтобы быть корректным и полным?
б) Добавим в язык произвольную n-арную связку, заданную таблицей истинности. Как написать для неё правила, чтобы полученное исчисление было корректным, полным и обладало свойством подформульности?