

Деревья разрешения 2

Пусть задана $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ и $x \in \{0, 1\}^n$. Обозначим через x^i , где $i \in \{1, \dots, n\}$, набор из $\{0, 1\}^n$, отличающийся от x только в i -ой координате. Чувствительностью $s_x(f)$ функции f на входе x называется число координат i , таких что $f(x) \neq f(x^i)$. Чувствительностью $s(f)$ функции f называется $\max_x s_x(f)$.

Пусть $B \subseteq \{1, \dots, n\}$. Обозначим через x^B , набор из $\{0, 1\}^n$, отличающийся от x во всех координатах из B и только в них. Блочной чувствительностью $bs_x(f)$ функции f на входе x называется максимальное число k непересекающихся блоков $B_1, \dots, B_k \subseteq \{1, \dots, n\}$, таких что $f(x) \neq f(x^{B_i})$ для всех i . Блочной чувствительностью $bs(f)$ функции f называется $\max_x bs_x(f)$.

1. Найдите $s(f)$ и $bs(f)$, где **а**) $f(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$; **б**) $f(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$; **в**) $f(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.
2. Докажите, что $s(f) \leq bs(f) \leq C(f) \leq D(f)$.
3. Пусть $n = 4k^2$. Разделим n булевых переменных на \sqrt{n} блоков по \sqrt{n} переменных в каждом: первый блок B_1 состоит из переменных $x_1, \dots, x_{\sqrt{n}}$, второй блок B_2 состоит из переменных $x_{\sqrt{n}+1}, \dots, x_{2\sqrt{n}}$ и т.д. Положим $f(x) = 1$ на наборе x , если существует хотя бы один блок B_i , в котором две последовательные переменные равны 1, а остальные переменные равны 0. Найдите $s(f)$ и $bs(f)$.
4. (Открытый вопрос.) Верно ли, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $bs(f) = O(s(f)^k)$?
5. **а**) Докажите, что если для $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ верно, что $f(x) \neq f(x^B)$, и B – минимальное по включению с таким свойством, то $|B| \leq s(f)$. **б**) Докажите, что $C(f) \leq s(f)bs(f)$.
6. **а**) Докажите, что $D(f) \leq C^1(f)bs(f)$. **б**) Докажите, что $D(f) \leq bs(f)^3$.
7. (Открытый вопрос.) Верно ли, что $D(f) = O(bs(f)^2)$?
8. Докажите, что для всякого одночлена M многочлена, вычисляющего функцию f , существует подмножество B индексов переменных M , такое что $f(\vec{0}^B) \neq f(\vec{0})$.
9. Докажите, что существует множество переменных размера $\deg(f)bs(f)$, пересекающее всякий одночлен многочлена, вычисляющего f .
10. Докажите, что $D(f) \leq \deg(f)^2 bs(f)$.
11. Докажите, что $D(f) \leq \deg(f)C^1(f)$.

Вероятностное дерево разрешения отличается от обычного (которое называют детерминированным, чтобы отличать от вероятностных) тем, что в нем кроме вершин, помеченных переменными, допускаются также вершины не помеченные ничем. Ребра, исходящие из такой вершины, помечены числами p и $1 - p$, где $0 < p < 1$. Вычисление в такой вершине происходит следующим образом: с вероятностью p мы переходим по ребру, помеченному числом p , и с вероятностью $1 - p$ мы переходим по ребру, помеченному числом $1 - p$. В остальном вычисление проходит также как и для детерминированных деревьев разрешения. Мы говорим, что вероятностное дерево разрешения T вычисляет функцию $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, если для всякого $x \in \{0, 1\}^n$ результат вычисления равен $f(x)$ с вероятностью не меньше $2/3$.

Сложностью вероятностного дерева разрешения T называется максимальное возможное количество вершин, помеченных переменной, встречающееся на каком-либо пути из вершины дерева в лист. Вероятностной сложностью деревьев разрешения $R_2(f)$ функции f называется минимальная сложность вероятностного дерева разрешения, вычисляющего функцию f .

12. Вероятностное дерево разрешения можно определить и как вероятностное распределение на детерминированных деревьях разрешения. Придумайте соответствующие определения и докажите эквивалентность нового определения старому.

Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ – ее входные переменные. Мы говорим, что действительный многочлен от n переменных $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ приближает f , если для всякого $x \in \{0, 1\}^n$ верно $|f(x) - p(x)| \leq 1/3$. Степенью приближения $\widetilde{\deg}(f)$ функции f мы называем минимальную степень многочлена, приближающего f .

Пусть $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ мультилинейный многочлен от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. Симметризацией многочлена p называется многочлен $p^{sym}(x) = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma(x))}{n!}$, где S_n – множество перестановок на n элементах.

13. Пусть $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ мультилинейный многочлен от n переменных. Тогда существует многочлен $q(z) \in \mathbb{R}[z]$ от одной переменной, такой что для всех $x \in \{0, 1\}^n$ верно $p^{sym}(x) = q(\sum_{i=1}^n x_i)$.

14. Докажите, что $\widetilde{\deg}(\bigoplus_{i=1}^n x_i) = n$.

15. Докажите, что $\widetilde{\deg}(f) \leq R_2(f)$.