Диагональные конструкции

просеминар 18 мая 2021

Аннотация

Диагональная конструкция — традиционное название для ситуации, когда искомый объект строится шаг за шагом. Мы разберём стандартные и не очень применения такой конструкции.

1. (Стандартный пример) Пусть имеется последовательность бесконечных двоичных дробей (последовательностей нулей и единиц). Как построить дробь, которая отличается от любой из них?

2. (Вариации) (а) Та же задача, но требуется, чтобы новая дробь отличалась от любой из старых в бесконечном числе знаков. (б) Есть некоторое множество A. Для каждого элемента $a \in A$ есть некоторое подмножество $S_a \subset A$. Покажите, что среди S_a есть не все подмножества A. (в) Как, используя принцип вложенных отрезков, показать, что $[0,1]$ — несчётное множество?

3. (а) Покажите, что не существует максимального сходящегося ряда с положительными членами: если $\sum a_n < +\infty$ и $a_n > 0$ при всех n, то есть другой ряд $\sum b_n < +\infty$, для которого $b_n/a_n \to \infty$. (б) Покажите, что не существует минимального расходящегося ряда с положительными членами: если $\sum a_n = +\infty$ и $a_n > 0$, то есть другой ряд $\sum b_n = +\infty$, для которого $b_n > 0$ и $b_n/a_n \to 0$.

4. Покажите, что всякую функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ можно представить в виде суммы трёх биекций $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

5. (а) Покажите, что существует строго возрастающая непрерывная функция, которая в рациональных точках принимает рациональные значения, а в иррациональных — иррациональные, (б) и при этом ни на каком отрезке не является ни линейной ($y = ax + b$), ни дробно-линейной ($y = (ax + b)/(cx + d)$).

Функция с натуральными аргументами и значениями называется *вычислимой*, если существует программа, которая вычисляет $f(n)$ для любого n. (Функция может быть частичной, тогда программа не должна останавливаться или по крайней мере не давать ответа, если $f(n)$ не определено. Но мы будем говорить только о тотальных (всюду определённых) функциях.

6. Покажите, что существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая растёт быстрее любой вычислимой функции: если $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — вычислимая (тотальная) функция, то $f(n)/g(n) \to +\infty$.

Назовём множество вычислимо бесконечным (техническое название: не иммунное множество), если существует программа, которая по любому натуральному n указывает n разных элементов этого множества.

7. Покажите, что существует такое множество $A \subset \mathbb{N}$, что ни A, ни его дополнение не будут вычислимо бесконечными (но будут бесконечными — почему?).

Говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}$ сводится по Тьюрингу к множеству $B \subset \mathbb{N}$, если существует алгоритм, который отвечает на вопросы о принадлежности любого натурального числа к A, вызывая (в качестве «оракула») внешнюю процедуру, которая отвечает на такие же вопросы про B.

8. (Теорема Клини – Поста) Покажите, что существуют два несравнимых по Тьюрингу множества A и B (ни одно из них не сводится к другому).

9. (Теорема об иерархии) Покажите, что существует множество двоичных слов, которое разрешимо программой (машиной Тьюринга), делающей не более $O(2^n)$ шагов на входах длины n, но не разрешимо никакой программой, делающей не более полиномиального от n числа шагов на входах длины n.

10. (Теорема Рамсея) Все двоичные слова разделены на два класса. Покажите, что любую бесконечную последовательность нулей и единиц можно разрезать на слова так, чтобы все они (кроме, возможно, первого) лежали в одном классе.

11. Известно, что последовательность a_n такова, что для любого действительного $\gamma > 1$ подпоследовательность $a_{\lfloor \gamma^i \rfloor}$ сходится к нулю. (В индексе берётся целая часть от геометрической прогрессии). Следует ли отсюда, что $a_n \to 0$?