

Элиминация кванторов

1. Булевой функцией называется функция вида $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Можно интерпретировать 0 как „ложь”, а 1 как „истину”. Тогда булевы функции можно записывать формулами от булевых переменных x_1, x_2, x_3, \dots , принимающих значения „истина” и „ложь”, пользуясь связками **И**, **ИЛИ** и **НЕ** (\wedge , \vee и \neg соответственно). **а)** Сколько существует булевых функций от n переменных? **б)** Всякую ли функцию можно реализовать формулой? Как реализовать функцию, истинную в одной точке? Как реализовать произвольную функцию?
2. Пусть на произвольном множестве с произвольным заданным набором предикатов дана формула вида $\forall x(A(x) \vee B(x))$. Можно ли в этом случае „пронести” квантор через дизъюнкцию? Рассмотреть аналогичные формулы с обоими кванторами и всевозможными связками. Можно ли для произвольной формулы построить эквивалентную ей формулу без квантора всеобщности?
3. На произвольном бесконечном множестве M задан предикат равенства. **а)** Для формулы, состоящей из квантора существования, за которым следует формула без кванторов (бескванторная формула), построить эквивалентную ей бескванторную. **б)** Для произвольной формулы построить эквивалентную ей бескванторную.
4. На множестве рациональных чисел заданы предикаты $x > y$ и $x = y$. Для произвольной формулы построить эквивалентную ей бескванторную.
5. Пусть теперь на множестве рациональных чисел заданы отношение порядка и операция сложения. Верно ли, что произвольная формула эквивалентна некоторой бескванторной?
6. **а)** Пусть на множестве целых чисел задано отношение порядка. Верно ли, что произвольная формула эквивалентна некоторой бескванторной? **б)** Как можно это исправить?