

Конечные автоматы

исправленная версия

Конечным автоматом называется совокупность вида $F = \langle \Sigma, Q, q_s, A, \tau \rangle$, где Σ — конечный входной алфавит, Q — конечное множество состояний автомата, $S \subseteq Q$ — множество начальных состояний, $A \subseteq Q$ — множество принимающих состояний, $\tau \subseteq \Sigma \times Q \times Q$ — множество переходов.

Автомату подаются слова в алфавите Σ , и он, произведя вычисление, принимает или отвергает их. Вычисление производится так. Вначале автомат находится в начальном состоянии. Далее он читает буквы слова по одной и меняет состояние в соответствии со своей функцией перехода: если $\langle a, q_1, q_2 \rangle \in \tau$, то автомат может, находясь в состоянии q_1 и прочитав в этот момент букву a , перейти в состояние q_2 (если переходов с одинаковым q_1 несколько, то автомат может “выбрать” любой из них). Автомат *принимает* слово, если по окончании хотя бы какого-нибудь вычисления на этом слове оказывается в состоянии из множества A .

Автомат называется *детерминированным*, если у него ровно одно начальное состояние и для каждого $q \in Q$ и $a \in \Sigma$ найдётся ровно один переход вида $\langle a, q, q' \rangle \in \tau$ для какого-то q' . Иначе автомат называется *недетерминированным*.

Множество слов в алфавите Σ называется *автоматным*, если найдётся детерминированный автомат, который принимает все слова из этого множества и не принимает никакие другие слова.

Автомат удобно изображать в виде графа состояний, отмечая начальное и принимающие состояния и на стрелках-рёбрах, соответствующих переходам автомата, указывая буквы алфавита.

1. Придумайте автомат, который распознаёт слово: **а)** a ; **б)** ab ; **в)** aab ; **г)** $ababa$.
2. Докажите, что следующие множества слов в алфавите $\{a, b\}$ автоматны, и нарисуйте соответствующие автоматы:
 - а) $\{w : \text{слово } w \text{ содержит хотя бы три буквы } a \text{ и хотя бы две буквы } b\}$;
 - б) $\{w : \text{слово } w \text{ содержит ровно три буквы } a \text{ и хотя бы две буквы } b\}$;
 - в) $\{w : \text{слово } w \text{ содержит нечётное количество букв } a \text{ и заканчивается на } b\}$;
 - г) $\{w : \text{слово } w \text{ имеет нечётную длину и содержит чётное количество букв } a\}$;
 - д) $\{w : \text{слово } w \text{ не содержит подслово } ab\}$; **е)** $\{w : \text{слово } w \text{ не содержит подслово } baba\}$;
 - ж) $\{w : \text{слово } w \text{ не содержит ни } ab, \text{ ни } ba\}$; **з)** $\{w : \text{слово } w \text{ содержит подслово } aab\}$.
3. **а)** Автоматно ли множество $\{a^{2n+5} : n \in \mathbb{N}\}$? **б)** множество $\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$? **в)** Опишите все автоматные множества слов в алфавите из одной буквы.
4. Постройте недетерминированные автоматы (с заданным числом состояний), распознающие следующие множества слов в алфавите $\{a, b\}$:
 - а) $\{w : \text{слово } w \text{ заканчивается на } aa\}$, 3 состояния; **б)** $\{w : \text{слово } w \text{ содержит } abab\}$, 5 состояний;
 - в) $\{a\}$, 2 состояния; **г)** $\{ab, aab, aba\}$; **д)** $\{w : \text{длина слова } w \text{ не больше } 5\}$.
5. Автоматно ли пустое множество слов? А множество всех слов (над фиксированным алфавитом)?
6. **а)** Докажите, что множество распознаётся недетерминированным автоматом тогда и только тогда, когда оно автоматно. **б)** Пусть у недетерминированного автомата n состояний. Какое наименьшее количество состояний может быть у эквивалентного ему (распознающего тот же язык) детерминированного автомата?
7. **а)** Докажите, что объединение автоматных множеств автоматно.
б) Пусть L и M автоматны. Докажите, что их конкатенация $L \cdot M = \{uv : u \in L, v \in M\}$ автоматна.
в) Докажите, что дополнение автоматного множества до множества всех слов (над фиксированным алфавитом) автоматно. **г)** Докажите, что пересечение автоматных множеств автоматно.
8. Пусть w^R — слово w , записанное задом наперёд. Докажите, что для любого автоматного множества L множество $\{w^R : w \in L\}$ автоматно.
9. Автоматны ли следующие множества в алфавите $\{a, b\}$? **а)** $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$; **б)** $\{w : w = w^R\}$;
в) $\{w : \text{слово } w \text{ содержит одинаковое количество вхождений слов } ab \text{ и } ba\}$.
10. Докажите, что любое бесконечное автоматное множество можно представить в виде объеди-