Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

8 мая 2009 года

Игровая семантика интуиционистской логики

Пусть ϕ – пропозициональная формула, состоящая из булевых переменных и связок $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$. Рассмотрим следующую игру. В нее играют два игрока: адвокат (**А**) и прокурор (**П**). Прокурор пытается доказать, что формула ϕ не является тождественно истиной в интуиционистской логике, а адвокат пытается опровергнуть доказательство прокурора. *Позицией* игры называется пара (A, P), где A и P – множества подформул формулы ϕ. Ход игрока **А** состоит в добавлении новой подформулы формулы ϕ в A, а ход игрока **П** состоит в добавлении новой подформулы формулы ϕ в P. Игроки начинают игру с позиции $(\{\phi\}, \emptyset)$.

В каждой позиции $C = (A, P)$ всякая подформула формулы ϕ считается либо истиной, либо ложной. Истинность подформул определяется следующим образом. Переменная p истина в позиции C тогда и только тогда, когда $p \in P$. Всякая формула, не лежащая в $A \cup P$ ложна в C. Если формула лежит в $A \cup P$, то ее истиность определяется рекурсивно в соответствии с классическим определением логических связок. То есть формула $\psi_1 \wedge \psi_2 \in A \cup P$ истина в C тогда и только тогда, когда ψ_1 истина в C и ψ_2 истина в C.

В позиции $C = (A, P)$ ходит игрок **А**, если все формулы из P истины в C, а какая-то из формул в A ложна в C. В остальных случаях ходит игрок P. В игре проигрывает тот игрок, который не может сделать ход, хотя очередь хода его.

1. Пусть игроки играют в игру для формулы $p \vee \neg p$. Какие формулы истины и чей ход в позиции **а)** $(\{p \vee \neg p\}, \emptyset)$; **б)** $(\{p \vee \neg p\}, \{p\})$; **в)** $(\{p \vee \neg p\}, \{\neg p\})$; **г)** $(\{p \vee \neg p, \neg p\}, \{p\})$?

2. Какой игрок имеет выигрышную стратегию в игре для формулы **а)** $p \vee \neg p$; **б)** $p \rightarrow \neg\neg p$; **в)** $\neg\neg p \rightarrow p$; **г)** $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$; **д)** $\neg\neg(p \vee \neg p)$?

3. Докажите, что если ϕ не является классической тавтологией, то игрок **П** имеет выигрышную стратегию в игре для ϕ. Докажите, что обратное неверно.

4. (лемма о нетерпоПливости) Рассмотрим игру для некоторой формулы. Докажите, что если в некоторой позиции выигрывает (имеет выигрышную стратегию) один из игроков, то никакой внеочередной ход соперника не помешает ему выиграть (у него все равно будет выигрышная стратегия).

5. Рассмотрим игру для некоторой формулы ϕ. Пусть в позиции (A, P) у игрока **П** есть выигрышная стратегиz. Постройте модель Крипке и мир в ней, в котором верны все формулы из P, и не верна хотя бы одна формула из A.

6. Рассмотрим игру для некоторой формулы ϕ и некоторую позицию (A, P) этой игры. Пусть существует модель Крипке и мир в ней, в котором верны все формулы из P, но неверна хотя бы одна формула из A. Докажите, что у игрока **П** есть выигрышная стратегия в этой позиции.