Игровая семантика интуиционистской логики

Пусть ϕ – пропозициональная формула, состоящая из булевых переменных и связок $\vee, \wedge, \neg, \to$. Рассмотрим следующую игру. В нее играют два игрока: адвокат (**А**) и прокурор (**П**). Адвокат пытается доказать, что формула ϕ тождественно истинна в интуиционистской логике, а прокурор пытается доказать, что это не так. *Позицией* игры называется пара (A, P), где A и P – множества подформул формулы ϕ. Ход игрока **А** состоит в добавлении новой подформулы формулы ϕ в A, а ход игрока **П** состоит в добавлении новой подформулы формулы ϕ в P. Игроки начинают игру с позиции $(\{\phi\}, \emptyset)$.

В каждой позиции $C = (A, P)$ всякая подформула формулы ϕ считается либо истинной, либо ложной. Истинность подформул в данной позиции определяется следующим образом. Переменная p истинна в позиции C тогда и только тогда, когда $p \in P$. Всякая формула, не лежащая в $A \cup P$ ложна в C. Если формула лежит в $A \cup P$, то ее истинность определяется рекурсивно в соответствии с классическим определением логических связок. То есть, например, формула $\psi_1 \wedge \psi_2 \in A \cup P$ истинна в C тогда и только тогда, когда ψ_1 истинна в C и ψ_2 истинна в C.

В позиции $C = (A, P)$ ходит игрок **А**, если все формулы из P истинны в C, а какая-то из формул в A ложна в C. В остальных случаях ходит игрок **П**. В игре проигрывает тот игрок, который не может сделать ход, хотя очередь хода его. Невозможность сделать ход означает, что множество игрока уже состоит из всех подформул ϕ и ему нечего больше добавить.

1. Пусть игроки играют в игру для формулы $p \vee \neg p$. Какие формулы истинны и чей ход в позиции **а)** $(\{p \vee \neg p\}, \emptyset)$; **б)** $(\{p \vee \neg p\}, \{p\})$; **в)** $(\{p \vee \neg p\}, \{\neg p\})$; **г)** $(\{p \vee \neg p, \neg p\}, \{p\})$?

2. Какой игрок имеет выигрышную стратегию в игре для формулы **а)** $p \vee \neg p$; **б)** $p \to \neg\neg p$; **в)** $\neg\neg p \to p$; **г)** $p \to (\neg p \to q)$; **д)** $\neg\neg(p \vee \neg p)$?

3. Докажите, что если ϕ не является классической тавтологией, то игрок **П** имеет выигрышную стратегию в игре для ϕ. Докажите, что обратное неверно.

4. (лемма о неторопливости) Рассмотрим игру для некоторой формулы. Докажите, что если в некоторой позиции выигрывает (имеет выигрышную стратегию) один из игроков, то никакой внеочередной ход соперника не помешает ему выиграть (у него все равно будет выигрышная стратегия).

5. Рассмотрим игру для некоторой формулы ϕ. Пусть в позиции (A, P) у игрока **П** есть выигрышная стратегия. Постройте модель Крипке и мир в ней, в котором верны все формулы из P, и неверна хотя бы одна формула из A.

6. Рассмотрим игру для некоторой формулы ϕ и некоторую позицию (A, P) этой игры. Пусть существует модель Крипке и мир в ней, в котором верны все формулы из P, но неверна хотя бы одна формула из A. Докажите, что у игрока **П** есть выигрышная стратегия в этой позиции.