Игры и стратегии

В игре в каждый момент должно быть ясно, кто должен сделать ход и какие ходы он может сделать. Если вся игра сыграна (не обязательно, как мы потом увидим, для этого понадобится лишь конечное время), надо знать, кто выиграл. Будем рассматривать игры с двумя игроками, делающими ходы по очереди.

1. На шахматной доске 3 на 3 клетки стоят на крайних горизонталях по 3 белые и чёрные пешки. Пешки не имеют права на первый ход через клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; сумевший провести пешку на дальний край доски выигрывает. У какого игрока есть выигрышная стратегия и какая?

В следующей задаче пункт а) действительно так прост, как кажется. Докажите пункт г) аккуратно.

2. На шахматной доске находится
а) ладья, которой разрешено ходить только вниз и влево,
б) король, которому разрешено ходить только вниз, влево, и по диагонали вниз-влево,
в) ферзь, с теми же ограничениями,
г) конь, которому разрешено ходить только вниз-влево.
Проигрывает игрок, который не может сделать ход. При каких начальных позициях первый игрок выигрывает? Тот же вопрос для доски $n \times n$.

3. “Ним”. Есть несколько куч камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из одной кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какие выигрышные стратегии у игроков?

Полезный минимальный случай для ручного разбора — игра с тремя кучами по четыре камня (или по пять — не забудьте про симметрию).

4. Есть ориентированный граф без циклов, из каждой вершины по стрелкам достижимо конечное число вершин. Позиции — вершины, ходы — стрелки, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что для любой начальной позиции у одного из игроков есть выигрышная стратегия, опишите её.

5. (Конвей) Написано через запятую несколько натуральных чисел. За один ход можно уменьшить одно из чисел, если остался 0, то все числа правее вычёркиваются. Запрещается уменьшать до нуля самое левое число, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает в позиции $(2, 4, 2, 1)$?

6. Первый игрок называет множество $M \subset \mathbb{R}$. Второй называет $\varepsilon_1 > 0$ и функцию f. Первый называет $\delta_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ и $x_2 \in M$. Второй называет $x_1 \in M$ и $\delta_2 > 0$. Первый выигрывает, если $f(U_{\delta_1}(x_1)) \subset U_{\varepsilon_1}(f(x_1))$ или неверно, что $f(U_{\delta_2}(x_2)) \subset U_{\varepsilon_2}(f(x_2))$. Иначе выигрывает второй.

Кто выигрывает в этой игре? А если множество M обязано быть открытым, а функция f — многочленом? А если M должно быть всем $\mathbb{R}$, а функция f — многочленом от синуса и косинуса? Какая теорема объясняет выигрышную стратегию?

Игра может и не заканчиваться за конечное время.

7. В ходе игры строится подмножество $M \in \mathbb{N}$. Ход: первый красит одно новое число в чёрный или белый цвет и указывает второму число, которое тот должен покрасить. Первый выигрывает, если множество чёрных чисел будет разрешимо. а) Первый проигрывает,если остались неокрашенные числа. б) Неокрашенные числа игнорируются.
Кто выиграет при правильной игре? А если оба игрока должны придерживаться вычислимых стратегий? А если оба игрока должны придерживаться стратегий, вычислимых при наличии доступа к оракулу для проблемы остановки (проблема остановки рассматривается для программ без оракулов)?

8. Докажите, что в крестиках-ноликах на бесконечной доске у второго игрока нет выигрышной стратегии.