Исчисление секвенций для логики высказываний

Формулы логики высказываний строятся из множества пропозициональных переменных $\{p, q, r, \ldots\}$ с помощью связок: $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если, то), $\perp$ (ложь), $\top$ (истина). Будем называть *секвенцией* выражение $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные множества формул. *Исчисление секвенций для классической логики высказываний* задается следующим образом:

Аксиомы:

$$\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta, \qquad \Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta$$

Правила:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}$$

Запятая в правилах используется как сокращение: Γ, A обозначает $\Gamma \cup \{A\}$. Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ выводима, если существует её *вывод*, дерево, в вершинах которого стоят секвенции, в листьях стоят аксиомы, в корне — секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, а переход от предков к потомкам, производится в соответствии с правилами вывода. Мы будем говорить о выводимости формулы A, имея в виду выводимость секвенции $\emptyset \Rightarrow \{A\}$.

1. Постройте вывод для каждой из следующих формул.

   (a) $p \wedge q \to p,\ p \wedge q \to q,\ p \to (q \to p \wedge q)$;

   (b) $p \to p \vee q,\ q \to p \vee q,\ (p \to q) \vee (q \to p)$;

   (c) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q),\ (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q),\ p \leftrightarrow \neg\neg p$;

   (d) $(p \vee q \to r) \to ((p \to r) \wedge (q \to r))$;

2. Какие из следующих формул выводимы, а какие нет? Почему?

   (a) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$;

   (b) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$;

   (c) $(p \wedge (p \leftrightarrow q)) \to q$;

   (d) $p \to \neg p$;

   (e) $((p \vee (p \to q)) \to q) \to q$;

3. Верно ли, что для любой формулы A секвенция $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$ выводима?

4. Докажите следующие свойства исчисления секвенций:

(a) Свойство "подформульности": правила вывода таковы, что в их верхнюю часть входят только подформулы формул, встречающихся в нижней части.

(b) Замкнутость относительно ослабления: если выводима секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, то также выводима $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ для любых формул A и B.

(c) Замкнутость относительно подстановки: для произвольной выводимой секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ результат замены переменной p во всех формулах этой секвенции на формулу A тоже будет выводим.

5. Набор значений пропозициональных переменных, при котором все формулы из Γ истинны, а все формулы из Δ ложны, будем называть *контрпримером* к секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Докажите, что в каждом из правил вывода исчисления секвенций нижняя секвенция имеет контрпример тогда и только тогда, когда хотя бы одна из верхних секвенций имеет контрпример.

6. (корректность и полнота исчисления секвенций) Докажите, что секвенция не имеет контрпримера тогда и только тогда, когда она выводима.

7. Введем в язык новую связку $\multimap$ и добавим к нашему исчислению следующие правила:

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, B \multimap A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B \multimap A, \Delta}$$

Какой таблицей истинности должна обладать связка $\multimap$, чтобы получившееся исчисление было полным и корректным?

8. (a) Добавим в язык связку $\leftrightarrow$ (эквивалентность). Какими правилами нужно расширить наше исчисление, чтобы сохранить корректность и полноту (и свойство "подформульности")?

   (b) Тот же вопрос для связки $A \oplus B$ (либо A, либо B).

   (c) Тот же вопрос для произвольной n-арной связки (вам дана её таблица истинности).

9. Представьте, что теперь у нас три значения истинности $\{0, 1, 2\}$. В этом случае секвенцией называется тройка (Γ, Δ, Θ), где Γ, Δ и Θ — произвольные конечные множества формул. Контрпримером такой секвенции назовем набор значений пропозициональных переменных, при котором все формулы из Γ имеют значение 1, все формулы из Δ имеют значение 2, а все формулы из Θ имеют значение 0.

   (a) Пусть в нашем языке единственными связками являются константы 0, 1, 2. Какие аксиомы должно содержать исчисление секвенций, чтобы при этом быть полным и корректным?

   (b) Добавим в язык произвольную n-арную связку (вам дана её таблица истинности). Какими правилами нужно расширить наше исчисление, чтобы сохранить корректность и полноту (и свойство "подформульности") в случае трехзначной логики?