

Порождающие грамматики

Множество всех конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^* . Пустое слово обозначается ε . Язык над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^* .

Если w — слово, а n — натуральное число, то через w^n обозначается слово, полученное n -кратным повторением слова w . Обращением слова w (обозначается w^R) называется слово, в котором символы, составляющие слово w , идут в обратном порядке. Например, $(abcaab)^R = baacba$.

Каждая порождающая грамматика состоит из конечного алфавита вспомогательных символов N , среди которых один символ выделен и называется начальным символом, конечного алфавита терминальных символов Σ и конечного множества правил вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β — слова в алфавите $N \cup \Sigma$. Будем обозначать терминальные символы строчными буквами из начала латинского алфавита, а вспомогательные символы — заглавными латинскими буквами. Правила будем записывать в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ.

Выводом в порождающей грамматике называется последовательность слов в алфавите $N \cup \Sigma$, в которой первое слово состоит из одного символа и этот символ начальный, а каждое последующее слово получено из предыдущего заменой некоторого подслова (то есть непрерывного куска) по одному из правил грамматики. Про последнее слово вывода говорят, что оно *выводится* в данной грамматике.

1. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow aSb, S \rightarrow T, T \rightarrow cTd, T \rightarrow \varepsilon$ слово **а)** $aaaccddbbb?$ **б)** $aacdb?$ **в)** $ccdd?$ **г)** $aabb?$ **д)** $acabdb?$ **е)** $\varepsilon?$ **ж)** $abcd?$

2. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow Sb, S \rightarrow ST, S \rightarrow SU, S \rightarrow \varepsilon, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow ab, Uaaa \rightarrow aaU, Uab \rightarrow b$ слово **а)** $bb?$ **б)** $ab?$ **в)** $aaab?$ **г)** $aaaab?$ **д)** $aaa?$ **е)** $aab?$ **ж)** $aaaaaab?$

Язык, порождаемый данной грамматикой, состоит из всех слов в терминальном алфавите, которые выводятся в этой грамматике.

3. Описать язык, порождаемый грамматикой **а)** $S \rightarrow FF, F \rightarrow aFb, F \rightarrow ab$; **б)** $S \rightarrow DSD, S \rightarrow c, D \rightarrow a, D \rightarrow b, D \rightarrow c$; **в)** $S \rightarrow aUS, S \rightarrow bVS, S \rightarrow T, Ua \rightarrow aU, Ub \rightarrow bU, Va \rightarrow aV, Vb \rightarrow bV, UT \rightarrow Ta, VT \rightarrow Tb, T \rightarrow \varepsilon$; **г)** $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$; **д)** $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aTT, Tb \rightarrow bb$; **е)** $S \rightarrow aTS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaTT, Tb \rightarrow b$; **ж)** $S \rightarrow CS, S \rightarrow TR, CT \rightarrow TTC, CR \rightarrow TR, R \rightarrow Tab, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$;

4. Построить грамматику, порождающую язык **а)** $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$; **б)** $\{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$; **в)** $\{b^n a^{2^n} \mid n \geq 0\}$; **г)** $\{a^n \mid n \text{ составное}\}$.

5. Существует ли над алфавитом $\{a\}$ язык, не порождаемый ни одной порождающей грамматикой?

Грамматика называется *контекстно-свободной*, если в каждом правиле в левой части один символ и этот символ вспомогательный. Например, грамматики из задач 1 и 3а являются контекстно-свободными, а грамматика из задачи 2 — нет.

6. Найти контекстно-свободную грамматику, порождающую язык **а)** $\{a^m b^n c^k \mid m \geq 1, n \geq 2, k \geq 3\}$; **б)** $\{a^m b^n \mid 0 \leq m < n\}$; **в)** $\{a^m b^n c^k \mid k = m+n\}$; **г)** $\{a^m b^n c^k \mid k \neq m+n\}$; **д)** $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$; **е)** $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$; **ж)** $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v\}$; **з)** $\{(aab)^n a (aba)^n c (bba)^n \mid n > 0\}$.

Две грамматики называются *эквивалентными*, если они порождают один и тот же язык.

7. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow abS, S \rightarrow a$ и грамматика $T \rightarrow aU, U \rightarrow baU, U \rightarrow \varepsilon$?

8. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab$, **б)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon$, **в)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSSb, S \rightarrow \varepsilon$, **г)** $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \varepsilon$, **д)** $S \rightarrow SaSb, S \rightarrow \varepsilon$, **е)** $S \rightarrow SaSbS, S \rightarrow SbSaS, S \rightarrow \varepsilon$, **ж)** $S \rightarrow aR, R \rightarrow aRR, R \rightarrow b$?

9. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $T \rightarrow abbT, T \rightarrow \varepsilon, ba \rightarrow ab$, **б)** $R \rightarrow Rabb, R \rightarrow \varepsilon, ba \rightarrow ab$, **в)** $S \rightarrow aSbSbS, S \rightarrow \varepsilon$, **г)** $U \rightarrow UaUbUb, U \rightarrow \varepsilon$, **д)** $U \rightarrow UabUb, U \rightarrow \varepsilon$?

10. Эквивалентны ли грамматика $B \rightarrow b, B \rightarrow aBCB, C \rightarrow c, C \rightarrow aCBC$ и грамматика $S \rightarrow abcS, S \rightarrow b, ba \rightarrow ab, ca \rightarrow ac$?