

Порождающие грамматики

Множество всех конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^* . Пустое слово обозначается Λ . Язык над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^* .

Если w — слово, а n — натуральное число, то через w^n обозначается слово, полученное n -кратным повторением слова w . Обращением слова w (обозначается w^R) называется слово, в котором символы, составляющие слово w , идут в обратном порядке. Например, $(abcaab)^R = baacba$.

Каждая порождающая грамматика состоит из конечного алфавита вспомогательных символов N , среди которых один символ выделен и называется начальным символом, конечного алфавита терминальных символов Σ и конечного множества правил вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β — слова в алфавите $N \cup \Sigma$. Будем обозначать терминальные символы строчными буквами из начала латинского алфавита, а вспомогательные символы — заглавными латинскими буквами. Правила будем записывать в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ.

Выводом в порождающей грамматике называется последовательность слов в алфавите $N \cup \Sigma$, в которой первое слово состоит из одного символа и этот символ начальный, а каждое последующее слово получено из предыдущего заменой некоторого подслова (то есть непрерывного куска) по одному из правил грамматики. Про последнее слово вывода говорят, что оно *выводится* в данной грамматике.

1. Рассмотрим грамматику $R \rightarrow TR, R \rightarrow a, T \rightarrow R, TT \rightarrow TbR$. Является ли выводом последовательность а) $R \Rightarrow TR \Rightarrow TTR \Rightarrow TbRR \Rightarrow TbaR \Rightarrow RbaR \Rightarrow abaR \Rightarrow abaa?$ б) $R \Rightarrow a?$ в) $TT \Rightarrow TbR \Rightarrow Tba \Rightarrow Rba \Rightarrow aba?$

2. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow aSb, S \rightarrow T, T \rightarrow cTd, T \rightarrow \Lambda$ слово а) $aaaccddbbb?$ б) $aacdb?$ в) $cccdd?$ г) $aabb?$ д) $acabdb?$ е) $\Lambda?$ ж) $abcd?$

3. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow Sb, S \rightarrow ST, S \rightarrow SU, S \rightarrow \Lambda, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow ab, Uaaa \rightarrow aaU, Uab \rightarrow b$ слово а) $bb?$ б) $ab?$ в) $aaaab?$ г) $aaaaab?$ д) $aaa?$ е) $aab?$ ж) $aaaaaab?$

Язык, порождаемый данной грамматикой, состоит из всех слов в терминальном алфавите, которые выводятся в этой грамматике.

4. Описать язык, порождаемый грамматикой а) $S \rightarrow FF, F \rightarrow aFb, F \rightarrow ab;$ б) $S \rightarrow DSD, S \rightarrow c, D \rightarrow a, D \rightarrow b, D \rightarrow c;$ в) $S \rightarrow aUS, S \rightarrow bVS, S \rightarrow T, Ua \rightarrow aU, Ub \rightarrow bU, Va \rightarrow aV, Vb \rightarrow bV, UT \rightarrow Ta, VT \rightarrow Tb, T \rightarrow \Lambda;$ г) $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb;$ д) $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aTT, Tb \rightarrow bb;$ е) $S \rightarrow aTS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaTT, Tb \rightarrow b;$ ж) $S \rightarrow CS, S \rightarrow TR, CT \rightarrow TTC, CR \rightarrow TR, R \rightarrow Tab, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb;$

Грамматика называется *контекстно-свободной*, если в каждом правиле в левой части один символ и этот символ вспомогательный. Например, грамматики из задач ?? и ???? являются контекстно-свободными, а грамматики из задач ?? и ?? — нет.

5. Найти контекстно-свободную грамматику, порождающую язык а) $\{a^m b^n c^k : m \geq 1, n \geq 2, k \geq 3\};$ б) $\{a^m b^n : 0 \leq m < n\};$ в) $\{a^m b^n c^k : k = m + n\};$ г) $\{a^m b^n c^k : k \neq m + n\};$ д) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\};$ е) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\};$ ж) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v\};$ з) $\{(aab)^n a (aba)^n c (bba)^n : n > 0\}.$

Две грамматики называются *эквивалентными*, если они порождают один и тот же язык.

6. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow abS, S \rightarrow a$ и грамматика $T \rightarrow aU, U \rightarrow baU, U \rightarrow \Lambda?$

7. Какие из следующих грамматик эквивалентны: а) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab;$ б) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow \Lambda;$ в) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSSb, S \rightarrow \Lambda;$ г) $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \Lambda;$ д) $S \rightarrow SaSb, S \rightarrow \Lambda;$ е) $S \rightarrow SaSbS, S \rightarrow SbSaS, S \rightarrow \Lambda;$ ж) $S \rightarrow aR, R \rightarrow aRR, R \rightarrow b?$

8. Какие из следующих грамматик эквивалентны: а) $T \rightarrow abbT, T \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab;$ б) $R \rightarrow Rabb, R \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab;$ в) $S \rightarrow aSbSbS, S \rightarrow \Lambda;$ г) $U \rightarrow UaUbUb, U \rightarrow \Lambda;$ д) $U \rightarrow UabUb, U \rightarrow \Lambda?$

9. Эквивалентны ли грамматика $B \rightarrow b, B \rightarrow aBCB, C \rightarrow c, C \rightarrow aCBC$ и грамматика $S \rightarrow abcS, S \rightarrow b, ba \rightarrow ab, ca \rightarrow ac?$