Решетки.

Пусть задано некоторое множество P. Бинарное отношение $\leqslant$ на этом множестве называется *отношением частичного порядка*, если выполнены следующие три условия:

1) *Рефлексивность*: для всякого $x \in P$ $x \leqslant x$.
2) *Антисимметричность*: для всех $x, y \in P$ если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.
3) *Транзитивность*: для всех $x, y, z \in P$ если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant y$.

Множество P, на котором задано отношение частичного порядка $\leqslant$, называется *частично упорядоченным множеством* и обозначается $\langle P, \leqslant \rangle$.

1. Являются ли следующие множества частично упорядоченными: **а)** множество $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка; **б)** множество всех подмножеств заданного множества S с отношением включения; **в)** множество $\mathbb{Z}_+$ целых положительных чисел с отношением "x делит y"; **г)** множество открытых подмножств в $\mathbb{R}$ с отношением включения; **д)** множество всех непрерывных действительных функций на отрезке $[0, 1]$, где $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [0, 1]$; **е)** множество всех действительных функций на отрезке $[0, 1]$, где $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ кроме конечного числа; **ж)** множество всех выпуклых множеств на плоскости с отношением включения; **з)** множество всех разбиений заданного множества S на подмножества, где $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда x является подразбиением y; **и)** множество всех людей, где $a \leqslant b$ означает, что либо $a = b$, либо a потомок b.

2. Пусть на множестве P задано отношение частичного порядка $\leqslant$. Определим отношение $\geqslant$ по следующему правилу: $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$. Докажите, что $\geqslant$ также является отношением частичного порядка.

Частично упорядоченное множество $\langle P, \geqslant \rangle$ называется *двойственным* частично упорядоченному множеству $\langle P, \leqslant \rangle$. Если Φ – утверждение о частично упорядоченных множествах, то, заменяя в нем все вхождения $\leqslant$ на $\geqslant$, получаем утверждение, *двойственное* утверждению Φ.

3. (**Принцип двойственности**) Если утверждение Φ верно во всех частично упорядоченных множествах, то двойственное ему утверждение также верно во всех частично упорядоченных множествах.

4. Пусть A – непустое множество и пусть P – множество всех частичных порядков на A. Для $\rho, \sigma \in P$ положим $\rho \leqslant \sigma$, если для всех $a, b \in A$ $a\rho b$ влечет $a\sigma b$. Докажите, что $\langle P, \leqslant \rangle$ является частично упорядоченным множеством.

Пусть $H \subseteq P$ и $a \in P$. Тогда a называется *верхней границей* H, если $h \leqslant a$ для всех $h \in H$. Верхняя граница a подмножества H называется его *супремумом* (обозначается $a = \sup H$), если $a \leqslant b$ для любой верхней границы b подмножества H. Аналогично определяется понятия *нижней грани* и *инфимума* (обозначается $\inf H$).

5. Докажите, что у всякого подмножества не более одного супремума и не более одного инфимума.

6. Опишите все решетки из не более чем 5 элементов (нарисуйте их диаграммы).

7. **а)** В каких частично упорядоченных множествах из задачи 1 у каждого непустого конечного подмножества есть супремум и инфимум? **б)** А для бесконечных подмножеств? **в)** А для пустого множества?

8. Докажите, что если для всякого непустого подмножества H частично упорядоченного множества P существует $\inf H$, то в P существует $\sup \emptyset$.

Частично упорядоченное множество $\langle L, \leqslant \rangle$ называется *решеткой*, если для всех $a, b \in L$ существуют $\sup\{a, b\}$ и $\inf\{a, b\}$. Решетка $\langle L, \leqslant \rangle$ называется *полной*, если всякое $Y \subseteq L$ имеет инфимум и супремум.

9. Какие из частично упорядоченных множеств в задаче 1 являются решетками? Полными решетками?

10. Докажите, что $\langle L, \leqslant \rangle$ является решеткой тогда и только тогда, когда для любого непустого конечного подмножества $H \subseteq L$ существуют $\sup H$ и $\inf H$.

Введем следующие обозначения: $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Будем называть $\wedge$ *пересечением*, а $\vee$ – *объединением*.

11. Докажите, что операции объединения и пересечения удовлетворяют следующим свойствам:

1) *Идемпотентность*: $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$.
2) *Коммутативность*: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$.
3) *Ассоциативность*: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4) *Тождества поглощения*: $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$.

12. Пусть задано множество L и на нем заданы две бинарные операции $\wedge$ и $\vee$, удовлетворяющие всем свойствам из предыдущей задачи. Положим $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = a$. Докажите, что $\langle L, \leqslant \rangle$ является решеткой.

13. (**Теорема о неподвижной точке**) Пусть $\langle L, \leqslant \rangle$ – полная решетка и пусть $f \colon L \to L$ – отображение, такое что для всех $x, y \in L$ если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$. Докажите, что существует $x \in L$ такой что $f(x) = x$.

14. Докажите, что всякое частично упорядоченное множество вкладывается в полную решетку.

15. Под вложением решеток мы понимаем такое их вложение, как частично упорядоченных множеств, при котором сохраняются операции инфимума и супремума. Докажите, что всякую решетку можно вложить в полную решетку.