Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

13 ноября 2009 года

Решетки, часть 2.

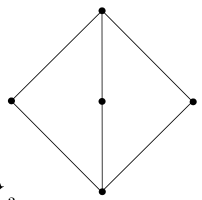
Решётка X *дистрибутивна*, если $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ и $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in X$. *Нулём* 0 и *единицей* 1 решётки называется её наименьший и наибольший элементы, соответственно (в случае, если они существуют). *Дополнением* элемента a называется такой элемент b, что $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. *Булевой алгеброй* называется дистрибутивная решётка с 0 и 1, в которой каждый элемент a имеет дополнение (обозначаемое $-a$).

1. Определите, какие из примеров задачи 1 предыдущего листка являются
а) дистрибутивными решётками, **б)** булевыми алгебрами.

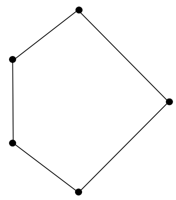
2. Приведите пример конечной решётки, не являющейся дистрибутивной. Докажите, что всякая подрешётка дистрибутивной решётки дистрибутивна.

3. а) Докажите, что в дистрибутивной решётке с 0 и 1 дополнение любого элемента единственно. **б)** Докажите тождества де Моргана: $-(a \wedge b) = -(a) \vee (-b)$, $-(a \vee b) = -(a) \wedge (-b)$.

4*. Докажите, что всякая недистрибутивная решётка содержит одну двух подрешёток $\mathfrak{M}_3$ или $\mathfrak{N}_5$ (смотри рисунок).



$\mathfrak{M}_3$



$\mathfrak{N}_5$

5. Приведите пример булевой алгебры счётно-бесконечной мощности.

6. Булева алгебра называется плотной, если для любых $a < b$ существует такой c, что $a < c < b$. Приведите пример счётной плотной булевой алгебры.

7. Докажите, что все счётные плотные булевы алгебры изоморфны. Всякая ли счётная булева алгебра вкладывается в счётную плотную булеву алгебру?

8. Докажите, что всякая конечная булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого конечного множества.

9. Докажите, что для любого частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, множество всех замкнутых вниз подмножеств P образует дистрибутивную решётку $D(P)$, причём P вкладывается в $D(P)$.

10. Пусть L – дистрибутивная решётка с 0 и 1. Элемент $a \in L$ называется *разложимым*, если $a = b \vee c$ для некоторых $b, c < a$. Обозначим через $J(L)$ множество всех неразложимых элементов L. Докажите, что если L конечно, то L изоморфно $D((J(L), \leqslant))$.

11. Докажите, что всякая дистрибутивная решётка вкладывается в некоторую булеву алгебру (т.е. изоморфна подрешётке булевой алгебры). Докажите, что не всякая решётка вкладывается в некоторую булеву алгебру.