

## Комбинаторика бесконечных слов

Напишем символ 0. Теперь бесконечно много раз повторим такую операцию: к текущему конечному слову приписать его “отражение” — слово, полученное из него заменой 0 на 1 и 1 на 0. То есть дальше мы получим 01, потом 0110, затем 01101001, и т. д. Выписанная в конце концов бесконечная последовательность называется *последовательностью Туэ–Морса*. Она начинается так: 01101001100101101001011001101001...

1. Является ли последовательность Туэ–Морса периодической (с некоторого места)?
2. **а)** Рассмотрим замену символов  $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$ . Докажите, что последовательность Туэ–Морса сохраняется при этой замене (замена применяется ко всем символам одновременно). **б)** Есть ли ещё последовательности, сохраняющиеся при этой замене?
3. **а)** Определим последовательность  $t_n$  рекурсивно:  $t_0 = 0, t_{2n} = t_n, t_{2n+1} = \bar{t}_n$ , где черта сверху обозначает операцию отражения:  $\bar{0} = 1$  и  $\bar{1} = 0$ . Докажите, что  $t_n$  — это последовательность Туэ–Морса.
4. Пусть последовательность  $v_n$  определяется следующим образом: представим число  $n$  в двоичной записи, посчитаем сумму цифр и возьмём результат по модулю 2 — это и будет значение  $v_n$ . Докажите, что  $v_n$  совпадает с последовательностью Туэ–Морса.
5. **а)** Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит слово вида  $uuu$  ни для какого непустого слова  $u$ .  
**б)** Докажите, что в последовательность Туэ–Морса не входит никакое слово вида  $axaxa$ , где  $a$  — символ, а  $x$  — произвольное слово.
6. **а)** Существует ли двоичная последовательность, в которую не входят квадраты, то есть слова вида  $uu$ ?  
**б)** Будем читать последовательность Туэ–Морса слева направо и записывать расстояния между последовательными вхождениями символа 0:  $t = 0110100110010110\dots$ . Получим 2102012... Докажите, что в полученной последовательности нет квадратов.  
**в)** Докажите что существует бесконечно много бесконечных бесквадратных слов над алфавитом из 3 символов.

Для бесконечной последовательности  $x$  и некоторого символа  $a$  рассмотрим долю количества вхождений  $a$  в начало  $x$  длины  $n$ . Устремив  $n$  к бесконечности, получим *частоту вхождений* символа  $a$  в последовательность. (Если предел не существует, частота не определена.)

7. Найдите частоту вхождения символов в периодическую последовательность.
8. Чему равна частота вхождения 0 в последовательность Туэ–Морса?

*Последовательность Колакоски* начинается так: 221121221221121122121121221121121221... Она состоит из блоков длины один или два символа 1 или 2, причём на  $n$ -м месте последовательности указывается, какую длину имеет  $n$ -й такой блок.

9. **а)** Существует ли в последовательности Колакоски частота вхождения символа 1? Докажите, что если она существует, то равна  $\frac{1}{2}$ .  
**б)** Верно ли, что всякое слово, которое встречается в последовательности Колакоски, встречается в ней хотя бы ещё раз?