Интуиционистская логика высказываний

Язык интуиционистской логики высказываний тот же, что и у классической логики: формулы строятся из множества переменных $\mathrm{Var} = \{P, Q, \dots\}$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$.

Опр. 1. *Моделью Крипке* называется тройка $\mathcal{W} = (W, \preccurlyeq, v)$, где

- W – непустое множество «*возможных миров*»,
- $\preccurlyeq$ – частичный порядок на W («*отношение достижимости*»), и
- $v : W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ – оценка переменных на W. Предполагается, что функция v монотонна, то есть, если $v(x, P) = 1$ и $x \preccurlyeq y$, то $v(y, P) = 1$.

Опр. 2. Отношение $\mathcal{W}, x \vDash A$ *истинности формулы A в мире x модели $\mathcal{W}$* определим по индукции:

- $\mathcal{W}, x \vDash P \iff v(x, P) = 1$, если $P \in \mathrm{Var}$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (A \wedge B) \iff (\mathcal{W}, x \vDash A$ и $\mathcal{W}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (A \vee B) \iff (\mathcal{W}, x \vDash A$ или $\mathcal{W}, x \vDash B)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash (A \to B) \iff \forall y \succcurlyeq x\, (\mathcal{W}, y \vDash A \Rightarrow \mathcal{W}, y \vDash B)$;
- $\mathcal{W}, x \vDash \neg A \iff \forall y \succcurlyeq x\, (\mathcal{W}, y \nvDash A)$.

Формула A называется *интуиционистской тавтологией* (сокращённо *и-тавтологией*), если A истинна в любом мире любой модели Крипке.

1. Доказать, что всякая интуиционистская тавтология является также классической. Убедиться, что обратное неверно (для формулы $P \vee \neg P$).
2. Доказать, что для любой модели Крипке $\mathcal{W}$ и формулы A, если $\mathcal{W}, x \vDash A$ и $x \preccurlyeq y$, то $\mathcal{W}, y \vDash A$.
3. Установить, являются ли следующие формулы и-тавтологиями:
   1) $P \to (\neg P \to Q)$, 2) $P \to \neg\neg P$, 3) $\neg\neg P \to P$, 4) $\neg\neg\neg P \to \neg P$,
   5) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$, 6) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$, 7) $\neg\neg(P \vee \neg P)$,
   8) $(P \vee \neg P) \to (\neg\neg P \to P)$, 9) $(\neg\neg P \to P) \to (P \vee \neg P)$, 10) $\neg P \vee \neg\neg P$.
4. (Дизъюнктивное свойство) Доказать, что если $A \vee B$ – и-тавтология, то таковой является одна из формул A или B. Удовлетворяет ли этому свойству классическая логика?
5. (Допустимое, невыводимое правило) Доказать, что если $A_1 = (\neg A \to (B \vee C))$ – и-тавтология, то таковой является и $A_2 = ((\neg A \to B) \vee (\neg A \to C))$. Является ли и-тавтологией импликация $A_1 \to A_2$? Существуют ли аналогичные примеры для классической логики?

6. (теорема Гливенко) Доказать, что A является классической тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ является и-тавтологией.

7. Придумать формулу, истинную на всех моделях Крипке, для которых отношение $\preccurlyeq$ есть линейный порядок, но которая не является и-тавтологией.

8. Придумать формулу от одной переменной P, опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинной на всех моделях глубины 1. Тот же вопрос для глубины 3 (соответственно, 2).

9. *Интуиционистское исчисление высказываний* IPC получается из классического заменой аксиомы $\neg\neg A \to A$ на ex falso (см. ниже аксиому 8). Докажите, что любая выводимая в IPC формула является и-тавтологией. Убедитесь, что для IPC, как и для классического исчисления высказываний, имеет место теорема о дедукции: $\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B$.

10. Множество формул Γ называется *дизъюнктивным*, если 1) Γ непротиворечиво и 2) $\Gamma \vdash A \vee B$ влечёт $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$.

    (a) Доказать, что если Γ дизъюнктивно и $\Gamma \vdash A$, то $A \in \Gamma$.

    (b) Доказать, что всякое непротиворечивое множество Γ можно расширить до дизъюнктивного.

    (c) Пусть W – множество всех дизъюнктивных множеств;
    $\Gamma \preccurlyeq \Delta \iff \Gamma \subseteq \Delta$; $v(\Gamma, P) = 1 \iff P \in \Gamma$.
    Доказать, что $\mathcal{W} = (W, \preccurlyeq, v)$ – модель Крипке и
    $$\mathcal{W}, \Gamma \vDash A \iff A \in \Gamma.$$

    (d) Вывести отсюда теорему о полноте IPC относительно моделей Крипке: $\mathsf{IPC} \vdash A$ если и только если A – и-тавтология.

Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний:

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
3. $A \wedge B \to A$, $A \wedge B \to B$,
4. $A \to (B \to A \wedge B)$,
5. $A \to A \vee B$, $B \to A \vee B$,
6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
8. $A \to (\neg A \to B)$.

Правило вывода: из A и $A \to B$ вывести B.