Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

06 октября 2017 года

Клеточные автоматы

На прямой расположена бесконечная в обе стороны цепочка одинаковых *клеток*. Каждая клетка может находиться в одном из конечного числа *состояний*. В каждый момент времени $(0, 1, 2, \ldots)$ все клетки одновременно меняют своё состояние; новое состояние определяется тремя старыми — самой клетки и двух соседей. Такое устройство называется *клеточным автоматом*.

Формально: чтобы задать клеточный автомат, надо указать конечное множество состояний Q и отображение $\tau\colon Q \times Q \times Q \to Q$ (новое состояние как функция от старых состояний левого соседа, самой клетки и правого соседа). *Конфигурацией* автомата называется (бесконечная в обе стороны) последовательность состояний всех клеток (отображение $\mathbb{Z} \to Q$). На каждом шаге конфигурация меняется по правилу τ.

1. Будем считать, что среди состояний автомата есть 0 и 1. Постройте клеточный автомат с таким свойстом: (1) если вначале была хоть одна единица, то со временем вся лента заполнится единицами (любая клетка рано или поздно станет 1 и останется навсегда), и (2) если вначале были одни нули, то так и останется.

2. (проверка чётности в унарной системе) Если вначале было $\ldots 01^k0 \ldots$ с чётным k, то лента заполнится буквами Y, а если с нечётным k, то буквами N. (Считаем, что в алфавите есть буквы $0, 1, N, Y$ и другие, если необходимо.)

3. (сжатие пробелов) На ленте вначале записаны нули и единицы. число единиц конечно. В конце единицы в том же количестве должны стоять рядом друг с другом.

4. (проверка симметрии) На ленте записано слово из нулей и единиц, окружённое символами # (до бесконечности). Проверьте, является ли это слово симметричным (палиндромом); ответом должны быть буквы Y или N.

5. Постройте клеточный автомат, рисующий параболу (в “пространстве-времени”). Он имеет состояния # (*начало координат*), 0 (*нейтральное состояние*), ! (*вспышка*) и, возможно, другие. Начав с конфигурации $\ldots 000\#000 \ldots$, автомат должен работать так, чтобы для каждого $n \geq 1$ клетка n переходила в состояние ! в момент n^2. (‘вспышки’ образуют параболу).

6. (задача о синхронном залпе) В шеренгу выстроены $n = 2^k$ солдат, являющихся клеточными автоматами (солдат имеет конечную память; каждую секунду он обменивается сообщениями с двумя соседями и в соответствии с полученными сигналами переходит в новое состояние). Крайние солдаты знают, что они крайние и действуют по особым правилам.

Сначала все солдаты находятся в нейтральном состоянии 0 (пока солдат и его соседи находятся в состоянии 0, он остается в состоянии 0). В некоторый момент командование переводит самого левого солдата в шеренге в состояние S (*start!*). Требуется, чтобы в какой-то момент все солдаты одновременно впервые пришли в особое состояние F (*fire!*).

Замечание: устав (внутреннее устройство солдата) не зависит от n.

7. Рассмотрим двумерный автомат с двумя состояниями (чёрные и белые клетки); на следующем шаге клетка принимает цвет, равный большинству из цветов самой этой клетки (C) и четырёх её соседей (W, E, N, S) на предыдущем шаге. Чёрных клеток конечное число.

NW	N	NE
W	C	E
SW	S	SE

а) Может ли число чёрных клеток увеличиться после однократного применения правила?

б) Может ли число чёрных клетов возрасти более чем в два раза?

в) Может ли число чёрных клетов возрасти более чем в два раза после нескольких применений данного правила?

8. а) Изменим правило: клетка принимает цвет большинства среди трёх клеток: её самой(C), соседа сверху (N) и соседа справа (E). Изначально чёрных клеток конечное число. Докажите, что все чёрные клетки исчезнут через конечное число шагов.

б) Верно ли аналогичное утверждение для автомата, который вычисляет большинство среди клеток C,N,S?

в) ...SW, NW, SE?

г) ...N, SW, SE?

д) ...C, SW, SE, NW, NE?

е) Докажите, что в первом пункте n чёрных клеток исчезнет через $O(n)$ шагов.

ж) Будем теперь считать, что в начальный момент все клетки белые. *Саботажнику* разрешается нарушать правила клеточного автомата и очернять некоторые клетки (одновременно или в разные моменты времени); в общей сложности разрешается очернить n клеток. Докажите, что в пространственно-временной диаграмме будет $O(n^2)$ чёрных клеток.

з) Докажите, что будет лишь $O(n)$ моментов времени, когда есть хотя бы одна чёрная клетка.