# *Колмогоровская сложность. Продолжение*

Пусть у нас есть некоторая нумерация на двоичных словах. Тогда можно рассматривать $KS$, как функцию натурального аргумента: $KS(m) = KS(x_m)$.

**Задача 14.** Покажите, что $\lim\limits_{m\to\infty} KS(m) = \infty$.

Заметим, что из задачи 13 следует, что это стремление не является эффективно вычислимым: нет алгоритма, который по данному числу $n$ указывал бы то $N$, начиная с которого колмогоровская сложность становится больше $n$. Рассмотрим две функции:

$$B(n) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid KS(m) \leqslant n\},$$
$$KS_{\geqslant}(N) = \min\{KS(m) \mid m \geqslant N\}.$$

Эти две функции связаны следующим соотношением: $KS_{\geqslant}(m) = n$ при $m \in (B(n-1), B(n)]$.

**Задача 15.** Пусть $f$ — произвольная вычислимая функция с натуральными аргументами и значениями. Тогда $B(n) \geqslant f(n)$ для всех $n$, кроме конечного числа.

**Задача 16.** Пусть $d\colon \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция. Рассмотрим функция

$$B_d(n) = \max\{d(x) \mid l(x) \leqslant n,\ d(x) \text{ определено}\}.$$

Докажите, что существует константа $c$ такая, что $B_d(n) \leqslant B(n+c)$.

**Определение.** Пусть $M$ — некоторый алгоритм. Мы говорим, что умеем решать проблему остановки для алгоритма $M$ и какого-то множества входных слов, если по любому входному слову $x$ из этого множества мы можем определить, останавливается ли $M$ на $x$ или не останавливается.

**Задача 17.** Для всякого алгоритма $M$ найдётся константа $c$ и алгоритм $A$, который по любому $n$ и по любому числу $t > B(n+c)$ выдаёт список всех слов длины не более $n$, на которых алгоритм $M$ останавливается.

**Задача 18.** Пусть $BB(n)$ — максимальное время работы оптимального декомпрессора на словах длины не более $n$. Докажите, что **(а)** $BB(n) \leqslant B(n+c)$ **(б)** $B(n) \leqslant BB(n+c)$ для некоторого $c$ и всех $n$.

**Задача 19.** Докажите, что если $f$ — вычислимая функция с натуральными аргументами и значениями, то найдётся такая константа $c$, что для всех $n$, для которых $f(B(n))$ определено, выполнено неравенство $B(n+c) \geqslant f(B(n))$.