Комбинаторы и лямбда-исчисление

В математическом языке обозначение $F(x)$, где F — некоторое выражение, можно понимать двумя способами: 1) как значение функции F на данном аргументе x, или же 2) как функцию, значение которой на *произвольном* аргументе x равно значению выражения $F(x)$, т.е. функцию $x \mapsto F(x)$. Пример: $(2x+3)^2$. Понимание 2) передаётся более корректно выражением $\lambda x.F(x)$, в котором x играет роль связанной переменной: $\lambda x.F(x)$ и $\lambda y.F(y)$ означают одну и ту же функцию.

Лямбда-исчисление — это простейший язык программирования, в котором единственным типом данных являются функции (от одного аргумента). Аргументами и значениями функций также являются функции. Одни функции определяются из других с помощью двух базисных операций: *аппликации*, т.е. применения функции к аргументу, записываемой как fx, и λ-*абстракции* $\lambda x.f$.[1]

λ-*термы* — это выражения, построенные из переменных с помощью операций аппликации и λ-абстракции. Примеры: $\lambda x.(xx)$, $\lambda x.((xz)\lambda y.((yy)x))$, и т.д. Термы, отличающиеся лишь переименованием связанных переменных, отождествляются. Термы, все переменные которых связаны, называются *комбинаторами*.

Соглашения: скобки ассоциируются влево; аппликация имеет более сильный приоритет, чем λ-абстракция; $\lambda x \lambda y \lambda z$ сокращается до λxyz, и т.д.

Вопросы на понимание определений и неформальную интерпретацию.

1. Определите тождественную функцию $id(x) = x$ в λ-обозначениях.
2. Объясните, что «делают» функции $\lambda xy.x$ и $\lambda x.xx$.
3. (currying) Придумайте, как можно определить функции двух и более аргументов в языке λ-исчисления;
4. Композиция функций f и g обычно определяется как такая функция $f \circ g$, что $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ для всех x. Запишите это определение в λ-обозначениях. Определите операцию композиции $\circ$ как комбинатор.

λ-термы играют роль программ. Вычисление такой программы сводится к последовательности преобразований данного терма, называемых редукциями. Редукция есть преобразование вида

$$(\lambda x.M)N \to M[x := N],$$

которое можно применять к любому подтерму данного терма. $M[x := N]$ означает результат замены всех свободных вхождений переменной x в терм M на N (при этом связанные переменные M переименовываются так, чтобы не возникало коллизии). Терм M имеет *нормальную форму*, если никакая редукция к нему не применима. Термы называются β-*эквивалентными* $M =_\beta N$, если M получается из N некоторой последовательностью редукций или обратных им преобразований.

[1] Полезно думать о функциях как о программах: аппликация fg — это программа, вызывающая функцию f с данной функцией g в качестве параметра; $\lambda x.f$ — это программа, по данному x вычисляющая значение выражения f с параметром x.

1. Определите комбинаторы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{W}$ такие, что для любых термов M, N, K имеем $\mathbf{C}MNK \to MKN$ и $\mathbf{W}MN \to MNN$.

2. Обозначим $\mathbf{I} = (\lambda x.x)$, $\mathbf{K} = \lambda xy.x$, $\mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$. Докажите $\mathbf{I} =_\beta \mathbf{SKK}$, $\mathbf{W} =_\beta \mathbf{SS}(\mathbf{KI})$, $\mathbf{B} =_\beta \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}$, где $\mathbf{B}$ — комбинатор композиции.

3. *Редукционным деревом* для терма M называется дерево, вершины которого помечены λ-термами, причем корень помечен M и сыновья вершины с меткой N помечены термами, получающимися однократной редукцией терма N.

   Нарисуйте редукционное дерево для терма $(\lambda xa.a)\mathbf{I}$.

4. Приведите пример терма, редукционное дерево которого представляет собой цепь длины n.

5. Приведите пример терма, редукционное дерево которого есть бесконечная цепь.

6. Приведите пример терма, в редукционном дереве которого есть как конечные, так и бесконечные ветви.

7. (теорема о неподвижной точке) a) Докажите, что для любого терма F найдётся терм X такой, что $X \to FX$. *Указание:* сначала рассмотрите терм $W = \lambda x.F(xx)$.

   b) Постройте комбинатор $\mathbf{Y}$ такой, что для любого терма F значение $\mathbf{Y}F$ есть неподвижная точка F, то есть $\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$.

   c) Для любого терма M найдётся F такой, что $F =_\beta M[x := F]$.

8. (теорема о базисе) Докажите, что любой комбинатор выражается с помощью аппликации через комбинаторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ с точностью до β-эквивалентности.

   Указание: Пусть CL — множество термов, построенных из переменных, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$ с помощью аппликации. Для каждого $F \in \mathrm{CL}$ и переменной x определим терм $(\lambda^* x.F) \in \mathrm{CL}$ следующим образом:

   - $\lambda^* x.x = \mathbf{I}$;
   - $\lambda^* x.F = \mathbf{K}F$, если x не входит в F;
   - $\lambda^* x.(FG) = \mathbf{S}(\lambda^* x.F)(\lambda^* x.G)$, иначе.

   Докажите, что $\lambda^* x.F$ можно редуцировать к $F[x := G]$.