

### Определимость в геометрии

На плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассматриваются следующие предикаты:

$B(x, y, z)$  «точка  $y$  лежит между  $x$  и  $z$ »

$C(x, y, u, v)$  «расстояния между  $xu$  и  $uv$  равны»

Расстояние между  $x$  и  $y$  обозначается  $|xy|$ .

1. Через  $B$  выразить предикат « $x, y, z$  лежат на одной прямой» и записать аксиому о параллельных. Выразить этот же предикат через  $C$ .
2. Выразить  $B$  через  $C$ .  
*Указание:* сначала выразите предикат  $|xy| \leq |uv|$ .
3. Выражается ли  $C$  через  $B$ ?
4. Отображение  $f : M \rightarrow M$  сохраняет предикат  $P$ , если для любых  $x_1, \dots, x_n \in M$   $P(x_1, \dots, x_n) = P(f(x_1), \dots, f(x_n))$ . Автоморфизмом для набора предикатов на множестве  $M$  называем взаимно-однозначное отображение  $f : M \rightarrow M$ , сохраняющее все предикаты  $P$  из данного набора. Докажите, что при автоморфизмах также сохраняются все выразимые из данного набора предикаты.
5. Опишите все автоморфизмы предиката  $C$ . Выразим ли из  $C$  предикат  $|xy| = 1$ ?
6. Опишите все автоморфизмы предиката  $B$ .
7. Опишите все одноместные предикаты, выразимые из  $C$ .
8. Пусть  $D(x, y)$  означает предикат  $|xy| = 1$ . Выразите через  $D$ :
  - (a) предикаты  $|xy| = n$  и  $|xy| = \sqrt{3}n$ , для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ;
  - (b) предикат  $|xy| = 1/2$ ;
  - (c) предикат  $|xy| = r$ , если расстояние  $r$  может быть построено с помощью одного циркуля исходя из пары фиксированных точек  $a, b$  таких, что  $|ab| = 1$ .
9. Пусть  $a, b$  — фиксированные точки плоскости на расстоянии 1. Отождествим прямую  $ab$  с множеством действительных чисел (где  $a = 0$  и  $b = 1$ ). Определите сложение и умножение, рассматриваемые как трёхместные предикаты на  $ab$ , через предикаты  $B, C, x = a$  и  $x = b$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .
10. Докажите, что на множестве действительных чисел с предикатами  $x + y = z, x = 1$  и  $x = 0$  не выразимо отношение  $\leq$ .