Вполне упорядоченные множества

1. В конечном слове из нулей и единиц разрешается заменить подслово 01 на 100. **а)** Докажите, что рано или поздно получится слово, к которому нельзя применить эту операцию. **б)** Зависит ли число операций от порядка, в котором они применяются, или только от начального слова? **в)** Разрешим теперь заменять 01 на $100\ldots00$ (единицу с произвольным числом нулей). Может ли теперь получиться бесконечная последовательность операций (начальное слово конечно)?

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

3. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым по одному разу, при этом ничьих не оказалось, и абсолютного победителя (который бы выиграл у всех) — тоже. Докажите, что есть три игрока А, Б и В, которые выиграли друг у друга по кругу (А у Б, Б у В, В у А).

В *упорядоченном* (или, более точно, *линейно упорядоченном*) множестве для любых двух различных элементов a и b известно, какой из них больше, а какой меньше (мы будем записывать это обычным знаком $a < b$; запись $a \leqslant b$ означает, что $a < b$ или $a = b$), и при этом $a < b$ и $b < c$ влечёт $a < c$.

4. Докажите, что следующие свойства линейно упорядоченного множества M равносильны: (1) всякое непустое подмножество M имеет наименьший элемент; (2) не существует бесконечной убывающей последовательности; (3) выполнен принцип *полной индукции*: если $A(x)$ есть некоторое свойство элементов множества M, которое (для x) доказано в предположении верности $A(y)$ при любом $y < x$, то $A(x)$ верно при всех x.

Множества с таким свойством называются *вполне упорядоченными*.

5. а) Докажите, что во вполне упорядоченном множестве для любого элемента (кроме наибольшего, если он есть) есть непосредственно следующий (как определить это понятие?), но может не быть непосредственно предыдущего. **б)** Докажите, что во вполне упорядоченном множестве любое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань (дайте соответствующие определения).

Если A и B — два упорядоченных множества, то можно построить множества $A+B$ (все элементы A меньше всех элементов B, внутри каждого из множеств — как раньше) и $A \times B$ (пара $\langle a, b\rangle$ меньше $\langle a', b'\rangle$, если $b < b'$ или если $b = b'$, но $a < a'$).

6. а) Будут ли множества $A + B$ и $A \times B$ вполне упорядочены, если таковы множества A и B? **б)** Будут ли верны следующие равенства? $A+B = B+A$, $A\times B = B\times A$, $A+(B+C) = (A+B)+C$, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$, $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$, $(A + B) \times C) = (A \times C) + (B \times C)$. Равенство здесь понимается как *изоморфизм*, то есть взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок (элементы в том же порядке, что и соответствующие им).

Будем говорить, что упорядоченное множество A меньше B, если B равно (изоморфно) $A+C$ при непустом C; другими словами, если A изоморфно *начальному отрезку* B (подмножеству, любой элемент которого меньше любого из остальных элементов).

7. Верно ли, что **а)** если $A < B$ и $B < C$ в указанном смысле, то $A < C$? **б)** вполне упорядоченное множество не может быть меньше самого себя? **в)** любое собственное подмножество вполне упорядоченного множества A является вполне упорядоченным и меньше A (в смысле приведённого определения)? **г)** если $A < B$, то $A + C < B + C$? **д)** если $A < B$, то $C + A < C + B$? **е)** если $A < B$, а C непусто, то $C \times A < C \times B$? **ж)** если $A < B$, а C непусто, то $A \times C < B \times C$?

8. Докажите, что для любых двух вполне упорядоченных множеств A и B верно ровно одно из трёх: $A < B$, $B < A$ или $A = B$.

9. а) Дано слово A в алфавите из натуральных чисел. Разрешается:
1) удалять последнюю букву, если она есть 0;
2) заменить подслово вида $B(n+1)$ на $(Bn)^k$, если все элементы подслова B превосходят n, где k — произвольно. $(Bn)^k = BnBnBn \dots Bn$ (k раз).
Доказать, что для любого начального слова любая последовательность преобразований такого рода приводит к пустому слову.
б) Решите задачу пункта а), если преобразование 2) применяется лишь в случае, когда A заканчивается на $B(n+1)$.

10. Рассматриваются слова в алфавите $\{a, b, c\}$. Допустимые подстановки: $aa \to bc$, $bb \to ac$, $cc \to ab$. Докажите, что любая последовательность таких преобразований для любого начального слова сходится (то есть получается слово, к которому нельзя применить никакой подстановки).