Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/
11 апреля 2008 года

Ординалы

Называем ординалом класс изоморфных друг другу вполне упорядоченных множеств. Ординалы упорядочены отношением $\alpha < \beta$ “α изоморфно начальному отрезку β” и снабжены операциями $+$ и $\cdot$. Наименьший ординал обозначаем 0, а его последователь 1. Ординал множества натуральных чисел обозначаем ω.

1. (нижняя и верхняя грань) Пусть $\{\alpha_i : i \in I\}$ — семейство ординалов.
а) Доказать, что среди этого семейства есть наименьший ординал.
б) Доказать, что существует ординал β такой, что $\forall i \in I\, \alpha_i \leqslant \beta$ и среди всех таких β существует единственный наименьший (обозначаемый $\sup\{\alpha_i : i \in I\}$).

2. (деление с остатком) Доказать, что для любых ординалов α и $\beta \leqslant \alpha$ найдутся единственные ординалы γ, $\delta < \beta$, такие что $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$.

3. (возведение в степень) Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех конечных последовательностей $\vec{x} := \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ элементов X таких, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$. Зададим на $\Omega(X)$ лексикографический порядок.
(Под лексикографическим порядком здесь имеется в виду следующее. Чтобы сравнить $\vec{x} := \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ и $\vec{y} := \langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$, ищем минимальное i, такое что $x_i \neq y_i$, и сравниваем x_i и y_i, это определяет порядок между $\vec{x}$ и $\vec{y}$; если такого i не найдётся, то есть одна из последовательностей является началом другой, то более короткая меньше.)

Доказать, что $\Omega(X)$ вполне упорядочено.

4. Класс изоморфизма множества $\Omega(X)$ обозначим через ω^α, если α — класс изоморфизма множества X. Проверить следующие равенства:
а) $\omega^0 = 1$;
б) $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$;
в) $\omega^{\alpha+\beta} = \omega^\alpha \cdot \omega^\beta$;
г) $\omega^{\sup\{\alpha_i : i \in I\}} = \sup\{\omega^{\alpha_i} : i \in I\}$.

5. (Канторовская нормальная форма) Доказать, что всякий ординал $\alpha > 0$ единственным образом представляется в виде

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k,$$

где все $n_i < \omega$ и $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$.