Вполне упорядоченные множества и ординалы

1. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

Упорядоченное (или, более точно, *линейно упорядоченное*) множество A — это множество с фиксированным порядком, т.е. для любых двух различных элементов a и b известно, какой из них больше, а какой меньше (мы будем записывать это обычным знаком $a < b$. При этом всегда $a < b$ и $b < c$ влечет $a < c$, а также $a \not< a$. Запись $a \leqslant b$ означает, что $a < b$ или $a = b$.

2. Докажите, что следующие свойства линейно упорядоченного множества A равносильны:
(i) всякое непустое подмножество A имеет наименьший элемент;
(ii) не существует бесконечной убывающей последовательности;
(iii) выполнен принцип *трансфинитной индукции*: если $F(x)$ есть некоторое свойство элементов множества A, которое (для x) доказано в предположении верности $F(y)$ при любом $y < x$, то $F(x)$ верно при всех x.

Множества с таким свойством называются *вполне упорядоченными*.

3. а) Докажите, что во вполне упорядоченном множестве есть наименьший элемент и для любого элемента (кроме наибольшего, если он есть) есть непосредственно следующий (как определить это понятие?).
б) Приведите пример вполне упорядоченного множества и элемента в нем, у которого нет непосредственно предыдущего.
в) Докажите, что во вполне упорядоченном множестве любое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань (дайте соответствующие определения).

Если A и B — два упорядоченных множества, то можно построить множества $A + B$ (все элементы A меньше всех элементов B, внутри каждого из множеств — как раньше) и $A \cdot B$ (пара $\langle a, b\rangle$ меньше $\langle a', b'\rangle$, если $b < b'$ или если $b = b'$, но $a < a'$).

4. а) Покажите, что множества $A + B$ и $A \cdot B$ вполне упорядочены, если таковы множества A и B.
б) Будут ли верны следующие равенства?
i) $A + B = B + A$,
ii) $A \cdot B = B \cdot A$,
iii) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
iv) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
v) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$,
vi) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$.
Равенство здесь понимается как *изоморфизм*, то есть взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок (элементы в том же порядке, что и соответствующие им).

Пусть A линейно упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(A)$ множество всех конечных последовательностей $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ из элементов A таких, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Зададим порядок на $\Omega(A)$ как лексикографический: последовательность $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ *лексикографически больше* $\langle b_1, b_2, \ldots, b_m\rangle$, если либо для некоторого $k \leq \min(n, m)$ имеет место $a_k \geq b_k$ и $a_i = b_i$ для всех $i < k$, либо $n > m$ и $a_i = b_i$ для всех $i \leq m$.

5. Докажите, что если A было вполне упорядоченным множеством, то таково и $\Omega(A)$.

6. Докажите, что для всяких линейных порядков A, B имеет место $\Omega(A + B) = \Omega(A) \cdot \Omega(B)$.

Подмножество B линейно упорядоченного множества A называется *начальным отрезком*, если $a \in B$ и $b < a$ влечет, что $b \in B$.

7. а) Докажите, что для двух вполне упорядоченных множеств A и B или A изоморфно собственном начальному отрезку B (т.е. такому начальному отрезку, который не совпадает со всем B), или B

изоморфно собственному начальному отрезку A, или A изоморфно B. **б)** Докажите, что всегда имеет место ровно одна из этих трех альтернатив и более того, существует единственный возможный выбор изоморфизма для третей альтернативы и изоморфизма и начального отрезка для первых двух.

Ординал — это класс эквивалентности изоморфных линейно упорядоченных множеств. Ординал $\alpha = [A]$ (класс всех порядков, изоморфных A) меньше ординала $\beta = [B]$, если A изоморфен собственному начальному отрезку B.

8. Докажите, что ординалы линейно упорядочены, т.е.
i)$\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ влечет $\alpha < \gamma$;
ii) либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$, либо $\alpha = \beta$.

9. а) Докажите, что во всяком непустом множестве ординалов есть наименьший элемент.
б) Докажите принцип *трансфинитной индукции* для ординалов: если $F(\alpha)$ есть некоторое свойство ординалов, которое (для любого данного α) доказано в предположении верности $F(\beta)$ для любого $\beta < \alpha$, то $F(\alpha)$ верно при всех α.

Арифметика ординалов. Будем отождествлять натуральное число n и ординал являющийся классом эквивалентности, состоящим из всех линейных порядков из n элементов (проверьте, что это действительно ординал). Обозначим через ω ординал $[\mathbb{N}]$. Пусть $\alpha = [A]$ и $\beta = [B]$, обозначим $\alpha+\beta = [A+B]$, $\alpha \cdot \beta = [A \cdot B]$, $\omega^\alpha = [\Omega(A)]$.

10. а) Докажите, единственная бинарная операция $+'$ удовлетворяющая следующим свойствам — это сложение ординалов:
i) $\alpha +' 0 = \alpha$,
ii) $\alpha +'(\beta + 1) = (\alpha +' \beta) + 1$,
iii) $\alpha +'(\sup_{i\in I} \beta_i) = \sup_{i\in I}(\alpha +' \beta_i)$.
б) Докажите, единственная бинарная операция $\cdot'$ удовлетворяющая следующим свойствам — это умножение ординалов:
i) $\alpha \cdot' 0 = 0$,
ii) $\alpha \cdot'(\beta + 1) = (\alpha \cdot' \beta) + \alpha$,
iii) $\alpha \cdot'(\sup_{i\in I} \beta_i) = \sup_{i\in I}(\alpha \cdot' \beta_i)$.
в) Докажите, единственная функция f удовлетворяющая следующим свойствам — это $\alpha \longmapsto \omega^\alpha$:
i) $f(0) = 1$,
ii) $f(\alpha + 1) = f(\alpha)\omega$,
iii) $f(\sup_{i\in I} \alpha_i) = \sup_{i\in I} f(\alpha_i)$.

11. (*Теорема Кантора о нормальной форме ординалов*) Каждый ординал $\alpha > 0$ единственным образом представляется в виде
$$\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n},$$
где $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.

12. а) Дана последовательность из натуральных чисел $A = \langle k_1, \ldots, k_n \rangle$. Разрешается:
i) удалять последний элемент A, если он равен 0;
ii) если подпоследовательность A вида $\langle u_1, \ldots, u_m, s+1 \rangle$, где все $u_i \geq s+1$, находится в конце A, то ее можно заменить на $\langle \underbrace{u_1, \ldots, u_m, s, u_1, \ldots, u_m, s, \ldots, u_1, \ldots, u_m, s}_{k \text{ копий}} \rangle$, где k — произвольно.

Доказать, что для любой исходной последовательности A, любая цепочка преобразований такого рода приводит к пустой последовательности.
б) Решите задачу пункта **а)**, если убрать условие на то, что $\langle u_1, \ldots, u_m, s+1 \rangle$ находится в конце A из преобразования *ii)*.

13. Конкурс: указать наибольший (среди участников конкурса) ординал.