P и NP. Часть 1.

Машина Тьюринга (кратко МТ) состоит из неограниченной в обе стороны ленты, поделенной на клетки с номерами $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, и управляющего устройства с конечным числом состояний, которое может считывать и записывать символы на ленте. *Программа* для МТ задается следующими компонентами: 1) конечным множеством Γ символов, которые записываются на ленте, подмножеством Σ входных символов и символом пробела $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$; 2) конечным множеством состояний Q, с выделенными начальным состоянием q_0 и двумя завершающими состояниями q_Y, q_N 3) функцией перехода $\delta\colon Q\setminus\{q_N, q_Y\}\times\Gamma \to Q\times\Gamma\times\{L, N, R\}$. На вход программа получает слово $x \in \Sigma^*$, записанное в ячейках с номерами $1, \dots, |x|$. Программа начинает работу, находясь в состоянии q_0 и считывая ячейку 1. Процесс вычисления осуществляется шаг за шагом. На каждом шагу машина считывает значение $a \in \Gamma$ текущей ячейки, находясь при этом в некотором состоянии q. Она вычисляет значение $\delta(q, a) = (q', b, D)$, записывает в текущую ячейку символ b, переходит в состояние q', сдвигает считывающее устройство влево, если $D = L$, вправо, если $D = R$, и остается на месте, если $D = N$. Если $q' = q_Y$ или $q' = q_N$, то машина заканчивает работу, принимая или, соответственно, не принимая слово x. Если же q' не является завершающим состоянием, программа переходит к следующему шагу.

Алфавитом называется произвольное конечное множество. Слово — это произвольная конечная последовательность букв алфавита. Язык — это произвольное множество слов. Язык называется *разрешимым*, если существует МТ, принимающая все слова этого языка и отвергающая слова, не лежащие в языке. Язык L называется полиномиально разрешимым, если существует машина Тьюринга M и полином $p(n)$, такие что M разрешает язык и для всякого x машина M останавливается на входе x за $p(|x|)$ шагов. Класс всех полиномиально разрешимых языков обозначается через P. Язык L называется полиномиально разрешимым с советом, если существует машина Тьюринга M и полиномы $p(n)$ и $q(n)$ такие что 1) если $x \in L$, то существует совет y, $|y| < p(|x|)$, такой что M принимает пару слов (x, y); 2) если $x \notin L$, то для всех y, $|y| < p(|x|)$ машина M отвергает (x, y). При этом для всяких x и y, таких что $|y| < p(|x|)$, машина M останавливается на паре входов (x, y) за $q(|x|)$ шагов. Класс всех полиномиально разрешимых с советом языков обозначается через NP.

1. Докажите, что следующие языки лежат в классе P: **а)** $\{0^k1^k : k \geqslant 0\}$; **б)** $\{ww \ : w \in \{0,1\}^*\}$.

2. Придумайте, как подавать следующие языки на вход машине Тьюринга, и докажите, что они лежат в классе P: **а)** $PATH = \{\langle G, s, t\rangle$: в ориентированном графе G есть путь из s в $t\}$; **б)** $RELPRIME = \{\langle x, y\rangle : x$ и y взаимно просты$\}$.

3. Докажите, что следующие языки лежат в классе NP: **а)** $HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle$: в неориентированном графе G есть гамильтонов (проходящий по всем вершинам ровно по одному разу) путь из s в $t\}$; **б)** $CLIQUE = \{\langle G, k\rangle$: G содержит полный подграф с k вершинами$\}$; **в)** $SUBSETSUM = \{\langle S, t\rangle : S = \{x_1, \dots, x_k\}$, и для некоторого подмножества $\{y_1, \dots, y_l\} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ выполнено $\sum y_i = t\}$.

4. Придумайте определение многоленточной машины Тьюринга. Как моделировать многоленточную машину Тьюринга с помощью одноленточной?

5. Придумайте определение двумерной машины Тьюринга. Как моделировать двумерную машину с помощью обычной?

6. Докажите, что всякий полиномиально разрешимый с советом язык разрешим. Сколько времени требуется машине на его разрешение?

7. В недетерминированной машине Тьюринга (в отличие от детерминированной) функция переходов многозначная, и разрешён переход по любому из значений. Слово принимается, если оно принимается хотя бы одним каким-нибудь способом. Докажите, что множество языков, полиномиально разрешимых на недерминированной машине Тьюринга, совпадает с множеством языков, полиномиально разрешимых с советом.

8. Все слова языка L принимаются машиной Тьюринга M за полиномиальное время, и никакие другие слова машиной M не принимаются (но, возможно, и не отвергаются). Верно ли, что L лежит в P?

9. *Замыканием Клини* A^* языка A называется язык, состоящий из слов вида $a_1a_2\dots a_k$, где $a_i \in A$, а $k \geqslant 0$. **а)** Докажите, что если A лежит в P, то и A^* лежит в P. **б)** Докажите, что если A лежит в NP, то и A^* лежит в NP.