

## Разные задачи

Слово  $u$  называется *префиксом* слова  $v$ , если  $v = ux$  для некоторого слова  $x$ . Префикс *собственный*, если  $|u| < |v|$ .

1. Пусть  $A$  — автоматное множество слов. Докажите, что следующие множества автоматны:

а)  $\{w \in A : \text{никакой собственный префикс слова } w \text{ не лежит в } A\}$ ;

б)  $\{w \in A : \text{слово } w \text{ не является собственным префиксом никакого слова из } A\}$ .

2. Для множества натуральных чисел  $A$  и для натурального числа  $k \geq 2$  положим  $B_k(A) = \{w : \text{слово } w \text{ является записью некоторого числа из множества } A \text{ в системе счисления с основанием } k\}$ . Например,  $B_2(\{3, 5\}) = \{11, 101\}$  и  $B_3(\{3, 5\}) = \{10, 12\}$ .

а) Пусть  $P$  — множество простых чисел. Является ли  $B_2(P)$  автоматным?

б) Приведите пример множества  $A$ , такого что  $B_2(A)$  автоматно, но  $B_3(A)$  не автоматно.

3. (*Лемма о трёх квадратах*) а) Пусть слова  $u$ ,  $v$ ,  $w$  примитивны, и  $|u| < |v| < |w|$ . Известно, что слово  $ww$  начинается с  $vv$ , и слово  $vv$  начинается с  $uu$ . Докажите, что  $|w| \geq |v| + |u|$ .

б) Достигается ли эта оценка? в) Будет ли верно неравенство пункта а), если известно только, что  $u$  примитивно, а про  $v$  и  $w$  этого не сказано?

4. Какое наибольшее количество квадратов различных непустых слов может входить в слово длины  $n$ ?

5. Какое наибольшее количество вхождений квадратов непустых примитивных слов может быть в слове длины  $n$ ?