Выразимость предикатов

k-местным предикатом на множестве M называется любое отображение множества M^k в множество $\{0,1\}$. Если на некотором элементе M^k предикат принимает значение 1, то мы говорим, что предикат истинен на этом элементе, иначе говорим, что он ложен на этом элементе. Примеры предикатов: $x = y$ (можно рассматривать как предикат на множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и т.д.), $x < y$, $x + y = z$, "x – простое число".

Неформально, будем говорить, что предикат P на множестве M *выразим* из предикатов $P_1, P_2, \dots, P_k$ на множестве M, если мы можем высказать некоторое предложение на русском языке, оперирующее только предикатами $P_1, P_2, \dots, P_k$, и такое, что оно истино в том и только том случае, если истинен предикат P. Более точно, из всего многообразия русского языка, кроме собственно предикатов $P_1, P_2, \dots, P_k$, мы можем использовать только союзы **И** (его в математической логике принято обозначать $\wedge$ или &) и **ИЛИ** (который обозначают $\vee$), конструкции "если A, то B" (ее обозначают $A \to B$) и "не A" (это обозначается как $\neg A$), и кванторы по переменным: "для всякого x" (обозначается $\forall x$) и "существует x" (обозначается $\exists x$).

1. Можно ли 3-местный предикат "лежать между" выразить через предикат "больше" на множестве $\mathbb{Q}$?

2. На множестве натуральных чисел (с нулем) из предиката $x + y = z$ выразить следующие предикаты: **а)** $x \le y$; **б)** $x = 0$; **в)** $x = 1$; **г)** $x = N$, для всякого фиксированного N; **д)** "x – четно".

3. Можно ли предикат "больше" выразить через предикат "лежать между" на множестве **а)** $\mathbb{Q}$; **б)** $[0,1]$; **в)** $\mathbb{Z}$?

4. Выразим ли предикат $xy = z$ через предикаты $x = y,\ x + y = z,\ y = x^2$ на множестве $\mathbb{R}$?

5. Можно ли через предикат $x + y = z$ на множестве $\mathbb{Z}$ выразить **а)** предикат $x < y$; **б)** предикат $xy = z$?

6. а) Выразим ли предикат $x = 1$ через предикат $x < y$ на множестве $\mathbb{Q}$? **б)** А через предикаты $x < y$ и $x + y = z$?

7. Выразим ли предикат $x = i$ на множестве $\mathbb{C}$ через предикаты $x + y = z$ и $xy = z$?

8. Выразим ли предикат $y = x + 2$ через предикат $y = x + 1$ на множестве $\mathbb{Z}$? А наоборот?

9. На множестве $\mathbb{N}$ дан предикат $x|y$ (x делит y), выразимы ли следующие предикаты: **а)** $x = y$; **б)** $x = 1$; **в)** "x – простое"; **г)** $x = 2$; **д)** $x < y$?

10. Доказать, что если предикат P выразим через предикат $x < y$ на множестве $\mathbb{Q}$, то он выразим через $x < y$ и на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$, где a – произвольный элемент $\mathbb{Q}$.

11. а) Построить предикат P на множестве $\mathbb{Q}$, выразимый через предикат $x < y$, но такой, что предикат $x < y$ не выразим через P; **б)** построить еще один такой предикат, не выразимый через предикат построенный Вами в предыдущем пункте.

12. На множестве $\mathbb{Z}$ дан предикат $y = x + 1$. Выразить предикат $y = x + N$, где N – большое фиксированное число, с помощью короткой формулы (длина формулы должна быть существенно меньше N). Под длиной формулы здесь понимается количество символов в ней.