Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

19 февраля 2010 года

Взвешивания

Всюду в этом листке log обозначает логарифм по основанию 2.

1. Загадано число от 1 до n. Можно задавать вопросы, на которые отвечают "да" или "нет". За какое наименьшее количество вопросов можно узнать загаданное число?

2. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

3. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

4. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти фальшивую монету?

Во всех следующих задачах все монеты различные. На имеющихся чашечных весах можно сравнивать только две монеты по весу.

5. Придумайте алгоритм упорядочения **а)** 3 монет за 3 взвешивания; **б)** 4 монет за 5 взвешиваний; **в)** 5 монет за 8 взвешиваний.

6. а) Докажите, что n монет нельзя упорядочить быстрее чем за $[\log n!]$ взвешиваний.
б) Докажите, что для упорядочения n монет всегда достаточно $\log n! + O(n)$ взвешиваний.

7. Докажите, что 5 монет можно упорядочить за 7 взвешиваний.

8. а) Докажите, что среди n монет можно найти самую тяжелую за $n-1$ взвешиваний. **б)** Докажите, что меньшим количеством взвешиваний обойтись нельзя.

9. а) Придумайте способ найти среди n монет вторую по тяжести монету за $n+\log n+C$ взвешиваний.
б) Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

10. а) Докажите, что из n монет можно одновременно выбрать самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + O(1)$ взвешиваний. **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

11. Как найти среди n монет среднюю по весу монету за $O(n)$ взвешиваний?

12. Пусть теперь опять противник загадал число от 1 до n, и мы можем задавать ему вопросы вида "меньше ли задуманное число данного конкретного числа". При этом противник всегда отвечает правильно, если ответ положительный, но может и соврать, если ответ отрицательный. Противнику разрешается соврать в 1% случаев (мы должны заранее сообщить, сколько зададим вопросов, чтобы противник мог сосчитать 1% от этого числа). Докажите, что можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.

13. Пусть опять противник загадал число от 1 до n, и мы можем задавать ему любые вопросы и получать ответы "да" или "нет". Снова, противнику разрешается соврать в 1% случаев, но теперь он может врать как в случае положительного ответа, так и в случае отрицательного. Докажите, что и теперь можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.