Логика описания понятий (дескрипционная логика)

Эта логика (точнее, обширное семейство логик) предназначается для записи знаний о некоторых «терминах» или «понятиях». Каждый термин обозначает некоторое *множество* объектов. Простейшее знание — одно понятие содержится в другом или совпадает с ним. Например,

$$\begin{gathered}\mathsf{Фрукт} \subseteq \mathsf{Растение},\\ \mathsf{Лошадь} \subseteq \mathsf{Парнокопытное},\\ \mathsf{Парнокопытное} \subseteq \mathsf{Животное},\\ \mathsf{Бегемот} \equiv \mathsf{Гиппопотам}.\end{gathered}$$

Классичейкий пример — классификация Линнея живых организмов. Более сложные утверждения можно записывать, если разрешить использовать новые способы построения понятий из исходных понятий, например, пересечение, объединение, дополнение. Например:

$$\begin{gathered}\mathsf{Мужчина} \cup \mathsf{Женщина} \equiv \mathsf{Человек},\\ \mathsf{Мужчина} \subseteq \neg\mathsf{Женщина}.\end{gathered}$$

Оказываются полезными и более сложные способы построения новых понятий из старых, с использованием двуместных *отношений* между объектами.

Важнейшая практическая задача: дано некоторый набор знаний про интересующие нас термины; требуется выяснить, следует ли из них определенное утверждение. Например, из вышеприведенных знаний следует, что $\mathsf{Лошадь} \subseteq \mathsf{Животное}$, $\mathsf{Мужчина} \subseteq \mathsf{Человек}$, и не следует, что $\mathsf{Человек} \subseteq \mathsf{Женщина}$ (почему?). Чтобы заниматься этой задачей, нужно дать точное определение того, что значит из некоторого конечного множества утверждений следует некоторое утверждение; а затем выяснить, есть ли для данного понятия логического следования алгоритм, выясняющий, да, следует, или нет, не следует; и сколько операций и какой объем памяти требуется этому алгоритму. Этим кругом вопросов и занимается *логика описания понятий* или (английский термин) *дескрипционная логика* (description logic). Кроме того, выясняется, что она тесно связана с модальной логикой.

Задача 1

Дано некоторое конечное количество «терминов», или, фактически, переменных: $\{X_1, \dots, X_n\} = \mathsf{Var}$. Из них разрешается составлять *утверждения* следующего вида (*включения*): $X_i \subseteq X_j$. Произвольный конечный набор таких утверждений будем обозначать буквой Γ и называть *теорией* или (как принято в этой науке) *онтологией.*

Вопрос: как узнать, что из данной онтологии Γ *следует* некоторое утверждение $X \subseteq Y$? (Здесь $X, Y \in \mathsf{Var}$.) То есть при всех «приписываниях» произвольных множеств переменным X_i справедливо следующее: если все включения из Γ оказались верными, то и включение $X \subseteq Y$ тоже верно.

Задача 1a. Дана онтология $\Gamma = \{X \subseteq Y, Y \subseteq V, X \subseteq Z, Z \subseteq V\}$. Следует ли из Γ утверждение $X \subseteq V$? $Y \subseteq Z$? $Y \subseteq X$? В случае отрицательного ответа предъявите «контрмодель» — приписывание переменным некоторых множеств, при котором все утверждения из Γ оказываются истинными, а проверяемое утверждение — ложным. Множеств какой мощности достаточно, чтобы всегда иметь возможность построить контрпример?

Формализуем понятие «приписывание множеств переменным» и с его помощью дадим формальное определение логического следования утверждения из набора утверждений.

Семантика: *модель* — это $M = (W, I)$, где $W \neq \varnothing$ — произвольное множество; $I\colon \mathsf{Var} \to 2^W$ — «интерпретирующая» функция, она приписывает каждой переменной X_i подмножество $I(X_i) \subseteq W$.

Мы пишем $M \models X \subseteq Y$, если $I(X) \subseteq I(Y)$; читаем: в модели M *истинно* включение $X \subseteq Y$.

Пишем $M \models \Gamma$, если в M истинны все включения, имеющиеся в Γ.

Наконец, пишем $\Gamma \models X \subseteq Y$ (говорим: из Γ *следует* включение $X \subseteq Y$), если для каждой модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models X \subseteq Y$.

Мы готовы точно сформулировать наш вопрос:

Задача 1b: Каков алгоритм (очевидно, что он существует), который по конечной онтологии Γ и данному включению $X \subseteq Y$ проверяет, что $\Gamma \models X \subseteq Y$?

Описав алгоритм, докажите, что он действительно решает данную задачу, то есть на входных данных Γ, X, Y он выдает ответ «Да» тогда и только тогда, когда $\Gamma \models X \subseteq Y$ согласно вышеприведенному определению.

Попутные вопросы: следуя буквально определению, для того, чтобы проверить это следование, нужно перебирать *всевозможные* множества W (и всевозможные приписывания его подмножеств переменным X_i). Какой мощности множеств W хватит? Хватит ли хотя бы счетных? а конечных? какой мощности конечных?

Задача 2

Имеем те же переменные $X_1, \dots, X_n$. Из них можем составлять *выражения* с помощью $\cap, \cup, \neg$. Онтологией Γ теперь будем называть включение $A \subseteq B$, где A, B — выражения.

Семантика — очевидна: $I(\neg A) = W \setminus I(A)$, $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$ и аналогично для $\cup$.

Логическое следование определяется точно так же.

Основной вопрос — точно тот же: как проверять $\Gamma \models A \subseteq B$.

Задача 2a. Даны следующие соотношения (будем называть их аксиомами):

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \mathsf{Animal} = \mathsf{Male} \cup \mathsf{Female}, & (5) & \mathsf{Woman} = \mathsf{Human} \cap \mathsf{Female}, \\
(2) & \mathsf{Male} \cap \mathsf{Female} = \varnothing, & (6) & \mathsf{Father} \subseteq \mathsf{Man}, \\
(3) & \mathsf{Human} \subseteq \mathsf{Animal}, & (7) & \mathsf{Mother} \subseteq \mathsf{Woman}, \\
(4) & \mathsf{Man} = \mathsf{Human} \cap \mathsf{Male}, & (8) & \mathsf{Parent} = \mathsf{Father} \cup \mathsf{Mother}.
\end{array}
$$

Интуитивно, эти утверждения читаются так: животные состоят из особей мужского и женского пола (1), причем последние не пересекаются (2); люди являются животными (3); мужчина — это человек мужского пола (4); женщина — человек женского пола (5); отцы являются мужчинами (6), матери — женщинами (7); родитель — это отец или мать (8).

Требуется выяснить, следуют ли из данных аксиом следующие соотношения:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \mathsf{Human} = \mathsf{Man} \cup \mathsf{Woman}, & (e) & \mathsf{Parent} \subseteq \mathsf{Human}, \\
(b) & \mathsf{Woman} = \mathsf{Human} \cap \neg\mathsf{Male}, & (f) & \mathsf{Mother} \subseteq \mathsf{Male}, \\
(c) & \mathsf{Father} \subseteq \mathsf{Male}, & (g) & \mathsf{Mother} = \mathsf{Woman}. \\
(d) & \mathsf{Father} \cap \mathsf{Mother} = \varnothing, & &
\end{array}
$$

Задача 2b. Придумайте алгоритм, который по данной онтологии Γ и двум выражениям A, B проверяют, что $\Gamma \models A \subseteq B$. Докажите, что он в точности решает данную задачу.

Множеств W какой мощности достаточно, чтобы всегда, когда из Γ не следует $A \subseteq B$, можно было найти множество не больше данной мощности, на котором можно построить «контрмодель»? Хватит счетных? конечных? сколько элементов достаточно?

Задача 2c. (Возможно, ее имеет смысл решать до задачи 2b.) Покажите, что можно задачу проверки $\Gamma \models A \subseteq B$ свести к задаче проверки того, что некоторое включение $A' \subseteq B'$ всегда верно, то есть истинно в любой модели $M = (W, I)$. А именно, преобразуем правую часть — утверждение $A \subseteq B$ — в выражение $(\neg A \cup B)$, обозначим это выражение через B'. Аналогично преобразуем каждое утверждение из Γ и из полученных выражений составим пересечение, обозначим полученное выражение через A'.

Докажите, что $\Gamma \models A \subseteq B \iff$ утверждение $A' \subseteq B'$ всегда верно.

Задача 3

Расширяем синтаксис далее: помимо переменных X_i, обозначавших множества объектов (а формально — подмножества W), мы вводим переменные для двуместных отношений $\mathsf{Rel} = \{R_1, \ldots, R_m\}$. В выражениях разрешаем новое: если A — выражение, то $\exists R.A$ и $\forall R.A$ — тоже выражения.

Семантика: $I(R) \subseteq W \times W$. Интерпретация I распространяется на все выражения так:

$$\begin{array}{rcl} I(\exists R.A) & = & \{e \in W \mid \exists d \in W\colon (e,d) \in I(R) \text{ и } d \in I(A)\}, \\ I(\forall R.A) & = & \{e \in W \mid \forall d \in W\ \big((e,d) \in I(R) \ \Rightarrow\ d \in I(A)\big)\}. \end{array}$$

Для удобства введем еще в синтаксис два «тривиальных понятия» $\top$ и $\bot$.

Их семантика всегда такова: $I(\top) = W$, $I(\bot) = \varnothing$.

Задача 3a. Нарисовать какую-нибудь модель (точек из четырех-пяти) и выяснить, какое множество точек в ней обозначают $\exists R.X$, $\forall R.X$; $\exists R.\top$, $\forall R.\bot$, $\exists R.\bot$, $\forall R.\top$.

Понятия $M \models A \subseteq B$, $M \models \Gamma$, $\Gamma \models A \subseteq B$ — определяются как всегда.

Мы говорим, что включение $A \subseteq B$ верно всегда, если $M \models A \subseteq B$ для всех моделей M.

Равенство (точнее, эквивалентность) выражений вводится так: $M \models A \equiv B$, если $M \models A \subseteq B$ и $M \models B \subseteq A$.

Задача 3b. Установить, что всегда верны включения и равенства:

$$\begin{array}{rclcrcl} & & & \quad & \exists R.(A \cup B) & \equiv & \exists R.A \cup \exists R.B \\ \neg\exists R.A & \equiv & \forall R.\neg A & & \forall R.(A \cap B) & \equiv & \forall R.A \cap \forall R.B \\ \neg\forall R.A & \equiv & \exists R.\neg A & & \exists R.(A \cap B) & \subseteq & \exists R.A \cap \exists R.B \\ & & & & \forall R.(A \cup B) & \supseteq & \forall R.A \cup \forall R.B \end{array}$$

Убедиться, что обратные включения к двум последним не всегда верны (привести контрмодель).

Задача 3c. Проверить следующие следования:

1. $A \models \forall R.A$ — имеется в виду $\{\top \subseteq A\} \models \{\top \subseteq \forall R.A\}$.
2. $\forall R.A \not\models \exists R.A$ — при аналогичной расшифровке.
3. $A \subseteq B \models \forall R.A \subseteq \forall R.B$. В привычных терминах:

   Если известно, что $\mathsf{Мужчина} \subseteq \mathsf{Человек}$, то $\forall\mathsf{иметьРебенка.Мужчина} \subseteq \forall\mathsf{иметьРебенка.Человек}$.

   То есть если мужчины есть подмножество людей, то всякий объект, у которого *все* дети — мужчины, является объектом, у которого все дети — люди.
4. $A \subseteq B \models \exists R.A \subseteq \exists R.B$.
5. $H \subseteq \forall R.H \models H \subseteq \forall R.\forall R.H$.

   Известен общий факт о терминах «Человек» (H) и «иметьРебенка» (R): у каждого человека каждый ребенок является человеком. Надо доказать, что из этого следует, что у каждого человека каждый внук/внучка тоже является человеком.

Задача 3d*. Постройте алгоритм проверки того, что $A \subseteq B$ всегда верно.

Каких множеств W в этом случае хватит? — Не более чем экспонента от длины входа.

Задача 3e*. Постройте алгоритм проверки того, что $\Gamma \models A \subseteq B$.

В общем виде описать этот алгоритм в задачах 3d и 3e, в принципе, можно, но это несколько долго (См лекцию 4 по ДЛ). Более полезно проверить конкретные включения и следования этим способом (3b и 3c).

Задача 3f. Предлагается убедиться, что в отличие от ситуации в задаче 2c, здесь проблема $\Gamma \models A \subseteq B$ уже не сводится (по крайней мере, не сводится тем же самым способом, что описан в задаче 2c) к проверке того, что некоторое утверждение $A' \subseteq B'$ всегда верно.

В качестве опровергающего примера можно взять любое следование из задачи 3e. Например:

- Хотя $A \models \forall R.A$ верно, включение $A \subseteq \forall R.A$ не является всегда верным.
- Хотя верно $A \subseteq B \models \forall R.A \subseteq \forall R.B$, но включение $(\neg A \cup B) \subseteq (\neg\forall R.A \cup \forall R.B)$ не является всегда верным.

Таким образом, задача логического следования — другая (и в действительности, сложнее), нежели задача проверки того, что включение всегда верно.

Задача 3g. Напишите включение $A \subseteq B$, использующее букву-термин $X \in \mathsf{Var}$ и букву-отношение $R \in \mathsf{Rel}$, такую что это включение «означает» следующее, то есть имеет место $M \models A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда в этой модели M верно следующее условие:[1]

1) $\mathsf{Dom}(R) \subseteq X$; 2) $\mathsf{Dom}(R) \supseteq X$; 3) $\mathsf{Ran}(R) \subseteq X$; 4) $\mathsf{Ran}(R) \supseteq X$.

Какое из этих четырех условий не удалось записать? Сможете ли Вы его записать, если разрешить использовать в выражениях записью R^-, обозначающей обратное к R отношение?

[1] Строго говоря, в этих условиях надо писать не R и X, а $I(R)$ и $I(X)$.