Просеминар по математической логике и информатике
http://proseminar.math.ru/

25 ноября 2016 года

Игры Эренфойхта

Игра Эренфойхта на графах. Пусть даны два неориентированных графа G и H без кратных рёбер. Играют двое: Новатор и Консерватор. Сначала Новатор выбирает число *раундов* k. Каждый раунд начинает Новатор. В начале i-го раунда он выбирает один из графов и отмечает в нём вершину числом i (вершины могут повторяться). В ответ на это Консерватор должен выбрать вершину в другом графе и также отметить её числом i. Игра длится k раундов. В конце игры в графе G отмечены вершины $a_1, a_2, \dots, a_k$, в графе H — $b_1, \dots, b_k$ (возможно, с совпадениями). Консерватор выигрывает, если выполнены следующие два условия:

1. вершины a_i и a_j совпадают тогда и только тогда, когда вершины b_i и b_j совпадают;
2. вершины a_i и a_j соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины b_i и b_j соединены ребром.

Иначе говоря, победа Консерватора означает, что соответствие $a_i \leftrightarrow b_i$ задаёт *частичный изоморфизм,* т.е. изоморфизм подграфов, индуцированных на множествах вершин $\{a_1, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, \dots, b_k\}$.

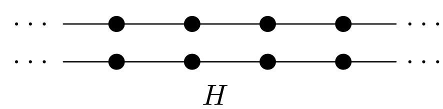
1. а) Докажите, что если G и H изоморфны, то у Консерватора есть выигрышная стратегия.

б) Докажите, что если графы G и H конечны, то верно и обратное.

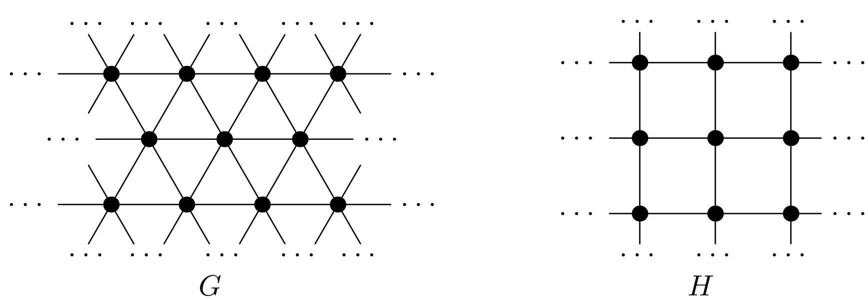
2. На рисунке изображены два бесконечных графа. У какого из игроков есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на этих двух графах?

а)

б)

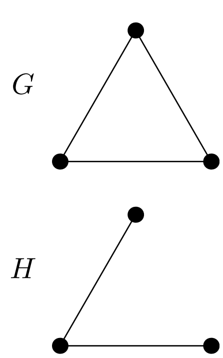


в)

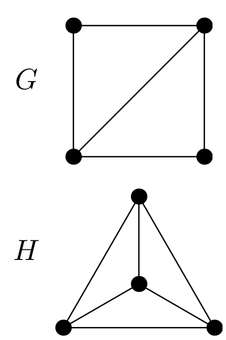


3. Для какого наименьшего k Новатор может гарантированно выиграть игру Эренфойхта на следующих графах за k раундов?

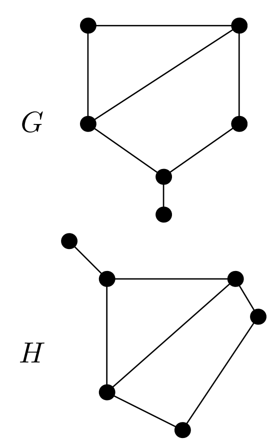
а)



б)



в)



Вместо неориентированных графов для игр Эренфойхта можно рассматривать и ориентированные (все определения сохраняются). С точки зрения логики, ориентированный граф — это интерпретация сигнатуры с отношением равенства и ещё одним двуместным отношением R: $R(u, v)$ верно тогда и только тогда, когда из u в v ведёт дуга.

4. Определите, кто выигрывает в следующих играх Эренфойхта:

а) на структурах $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$?

б) на структурах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <)$?

в) на структурах $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, <)$?

д) на структурах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <)$?

е) на структурах $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$?

5. Пусть дана формула φ сигнатуры Ω без свободных переменных. Докажите, что существует такое число k (зависящее только от φ), что если в одной интерпретации сигнатуры φ истинна, а в другой — ложна, то Новатор может гарантированно выиграть игру Эренфойхта на этих двух интерпретациях за k раундов. Как вычислить k, зная φ?

6. Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же формулы (без свободных переменных). Докажите, что интерпретации A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в соответствующей игре Эренфойхта выигрывает Консерватор.

7. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{N}, \leq, y = x+1)$ и $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, \leq, y = x+1)$ элементарно эквивалентны. **б)** Выведите из этого, что для всякой формулы первого порядка $\phi(x)$ с одной свободной переменной в сигнатуре $(\leq, y = x+1)$ и интерпретации $\mathbb{N}$ множество тех n, на которых формула истинна, конечно или является дополнением конечного.

8. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{Z}, \leq, y = x+1)$ и $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, \leq, y = x+1)$ элементарно эквивалентны.

б) Выведите из этого, что отношение $\leq$ в $\mathbb{Z}$ не выражается через отношение $y = x+1$.

в) Выражается ли отношение $y = x+1$ через $\leq$?

г) Выражается ли отношение $\leq$ через $y = x+1$ в $\mathbb{N}$?