

Логика знаний

Модальные пропозициональные формулы строятся из счётного множества пропозициональных переменных $\text{Var} = \{p, q, r, \dots\}$ при помощи обычных булевых связок ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$) и дополнительной одноместной связки \Box . В контексте логики знаний $\Box A$ читается как „я знаю, что A верно“. Мы будем также пользоваться двойственной связкой \Diamond , определяемой следующим образом: $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$. Высказывание $\Diamond A$ означает „высказывание A не противоречит моим знаниям“.

Моделью Крипке для логики знаний называется тройка $M = \langle W, \sim, \theta \rangle$, где W — произвольное непустое множество, называемое *множеством возможных миров*, \sim — отношение эквивалентности на W , а $\theta: \text{Var} \times W \rightarrow \{0, 1\}$ — функция оценки истинности переменных.

Истинность произвольной формулы A в мире $w \in W$ определяется по индукции („ A истинна в мире w модели M “ сокращённо записывается как $M, w \models A$):

- $M, w \models p \iff \theta(p, w) = 1$ (если $p \in \text{Var}$);
- $M, w \models A \wedge B \iff (M, w \models A) \text{ и } (M, w \models B)$;
- $M, w \models A \vee B \iff (M, w \models A) \text{ или } (M, w \models B)$;
- $M, w \models A \rightarrow B \iff (\text{если } (M, w \models A), \text{ то } (M, w \models B))$;
- $M, w \models A \leftrightarrow B \iff (M, w \models A) \text{ тогда и только тогда, когда } (M, w \models B)$;
- $M, w \models \neg A \iff \text{неверно, что } (M, w \models A)$;
- $M, w \models \Box A \iff \text{для всех } v \sim w (M, v \models A)$
(формула A истинна во всех мирах, эквивалентных w).

Интуитивно, миры из W соответствуют возможным положениям вещей, и два мира эквивалентны, если они неразличимы с точки зрения моих знаний.

Рассматриваются также логики с несколькими модальностями (*полномодальные*) $\Box_1, \Box_2, \dots, \Box_n$ (и, соответственно, несколькими отношениями эквивалентности $\sim_1, \sim_2, \dots, \sim_n$), соответствующими знаниям разных субъектов.

1. Какие из следующих формул истинны во всех моделях Крипке для логики знаний: **а)** $\Box p \rightarrow p$; **б)** $p \rightarrow \Box p$; **в)** $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$; **г)** $\Diamond \Box p \rightarrow p$; **д)** $\Box p \rightarrow \Diamond p$; **е)** $\Box_1 \Box_2 p \rightarrow \Box_2 \Box_1 p$?
2. Докажите, что всякая модальная формула в логике знаний эквивалентна формуле в дизъюнктивной нормальной форме, т.е. формуле вида $B_1 \vee \dots \vee B_n$, где B_i — это либо конъюнкции литералов (переменных и их отрицаний), либо формулы вида $\Diamond A$ или $\neg \Diamond A$, где A — конъюнкция литералов.
3. Докажите, что формулы логики знаний, содержащие только переменные p_1, \dots, p_k , разбиваются на конечное число классов эквивалентных между собой формул.
4. Постройте модель Крипке, описывающую знания Ильи Муромца из задачи **1** прошлого листочка.
5. Пусть среди 3 детей двое чумазных. Постройте модель Крипке (с тремя модальностями), описывающую знания каждого из детей о чумазости. Как изменится эта модель после того, как детям объявлено, что среди них есть чумазные **а)** один раз; **б)** два раза.
6. Постройте модели Крипке и опишите, как они изменяются в задачах **4**, **5** и **6** из прошлого листка.