5 мая 2017 года

Многообразия алгебр

Алгебра $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, f_1, \ldots, f_n)$ — это множество $\mathbf{A}$ с фиксированным набором функций

$$f_1\colon \underbrace{\mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{k_1 \text{ раз}} \to \mathbf{A}, \ldots, f_n\colon \underbrace{\mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{k_n \text{ раз}} \to \mathbf{A}.$$

При этом мы считаем, что функциям $f_1, \ldots, f_n$ сопоставлены имена $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Под *сигнатурой* Σ алгебры $\mathfrak{A}$ мы будем понимать этот набор имен функций с приписанными "арностями":

$$\Sigma = (\langle \mathbf{f}_1, k_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{f}_n, k_n \rangle).$$

Пример: Поле рациональных $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \times)$, поле комплексных $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \times)$ и кольцо целых чисел $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times)$ — это алгебры сигнатуры $(\langle \mathbf{0}, 0\rangle, \langle \mathbf{1}, 0\rangle, \langle \mathbf{+}, 2\rangle, \langle \mathbf{\times}, 2\rangle)$.

Терм $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$ от переменных $x_1, \ldots, x_m$ сигнатуры $\Sigma = (\langle \mathbf{f}_1, k_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{f}_n, k_n \rangle)$ — это либо одна из переменных $x_1, \ldots, x_n$, либо выражение вида

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{s}_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathbf{s}_{k_i}(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $\mathbf{s}_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathbf{s}_{k_i}(x_1, \ldots, x_m)$ являются термами сигнатуры Σ.

Пример: Рассмотрим сигнатуру $\Sigma = (\langle \mathbf{0}, 0\rangle, \langle \mathbf{1}, 0\rangle, \langle \mathbf{+}, 2\rangle, \langle \mathbf{\times}, 2\rangle)$ из примера выше. Выражения $x \mathbf{+} y$, $x \mathbf{\times} y$, $((x \mathbf{+} y) \mathbf{\times} y) \mathbf{+} \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \mathbf{\times} \mathbf{1}$ являются термами сигнатуры Σ от переменных x, y.

Для данной алгебры $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ, терма $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$ и элементов алгебры $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{A}$ значение $\mathbf{t}(a_1, \ldots, a_m)$ в $\mathfrak{A}$ вычисляется путем интерпретации имен функций входящих в $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$ как соответствующих функций из $\mathfrak{A}$ и интерпретации $x_1, \ldots, x_m$ как $a_1, \ldots, a_m$, соответственно.

Пусть $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, f_1, \ldots, f_n)$ алгебра сигнатуры Σ и $\mathbf{G} \subseteq \mathfrak{A}$ множество элементов $\mathfrak{A}$. Мы говорим, что алгебра $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ — это *подалгебра* $\mathfrak{A}$, *порожденная* $\mathbf{G}$, если $\mathfrak{B}$ имеет вид $(\mathbf{B}, f_1, \ldots, f_n)$, где $\mathbf{B}$ это множество всех значений $\mathbf{t}(g_1, \ldots, g_m)$ для всевозможных термов $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры Σ и элементов $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{G}$. Если алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ совпадают, то мы говорим, что $\mathfrak{A}$ *порождена* множеством $\mathbf{G}$.

1. Какие подалегбры алгебра $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times)$ порождают следующие множества:

а) $\{1, -1\}$;

б) $\{3, -2\}$;

в) положительные числа;

г) четные числа?

2. Сигнатура булевых алгебр — это $(\langle \mathbf{0}, 0\rangle, \langle \mathbf{1}, 0\rangle, \langle \wedge, 2\rangle, \langle \vee, 2\rangle, \langle \mathbf{-}, 1\rangle)$. Булевой алгеброй подмножеств множества $\mathbf{S}$ называется алгебра $(\mathcal{P}(\mathbf{S}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$, где $\mathcal{P}(\mathbf{S})$ обозначает множество всех подмножеств $\mathbf{S}$, а $(\cdot)^C$ это операция $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{S} \setminus \mathbf{X}$. Пусть $\mathbf{S}$ конечное множество.

а) Докажите, что булева алгебра подмножеств $\mathbf{S}$ порождается множеством всех одноэлементных подмножеств $\mathbf{S}$.

б) Приведите пример множества $\mathbf{G} \subset \mathcal{P}(\mathbf{S})$ из $|\mathbf{S}| - 1$ элементов, порождающего булеву алгебру подмножеств $\mathbf{S}$.

в)* Докажите, что если множества $\mathbf{G} \subset \mathcal{P}(\mathbf{S})$ состоит менее чем из $|\mathbf{S}| - 1$ элементов, то оно не порождает булеву алгебру подмножеств $\mathbf{S}$.

Пусть $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}})$ и $\mathfrak{B} = (\mathbf{B}, f_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{B}})$ алгебры сигнатуры $\Sigma = (\langle \mathbf{f}_1, k_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{f}_n, k_n \rangle)$, а h функция из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$. Мы говорим, что h *гомоморфизм* алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$, если

$$h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{k_i})) = f_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_{k_i}))$$

для всех i от 1 до n и элементов $a_1, \ldots, a_{k_i}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

3. Являются ли следующие отображения гомоморфизмами:

а) $h\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ такое, что $h(n) = n$;

б) $h\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ такое, что $h(n) = -n$;

в) $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ такое, что $h(z) = |z|$;

г) $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ такое, что $h(z) = 2z$;

д) $det\colon (\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \times) \to (\mathbb{R}, \times)$, где $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ обозначает множество всех двумерных матриц над полем $\mathbb{R}$, а det функция детерминанта;

е) $h\colon (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$ такое, что $h(\mathbf{X}) = \{b \in \mathbb{R} \mid [b] \in \mathbf{X}\}$;

ж) $h\colon (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C) \to (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$ такое, что $h(\mathbf{X}) = \{[b] \mid b \in \mathbf{X}\}$;

з) функции $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +^{\mathbb{Z}_n})$, $h(z) = z - n[z/n]$, где $\mathbb{Z}_n$ состоит из чисел $0, \ldots, n-1$ и для $a, b \in \mathbb{Z}_n$ мы полагаем $a +^{\mathbb{Z}_n} b = a + b - n[(a+b)/n]$;

и)* функции $h\colon (\mathbb{Z}, \times) \to (\mathbb{Z}_n, \times^{\mathbb{Z}_n})$, $h(z) = z - n[z/n]$, где для $a, b \in \mathbb{Z}_n$ мы полагаем $a \times^{\mathbb{Z}_n} b = a \times^{\mathbb{Z}_n} b - n[(ab)/n]$?

4. Докажите, что если алгебра $\mathfrak{A}$ порождается множеством $\mathbf{G}$ и $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ сюръективный гомоморфизм, то алгебра $\mathfrak{B}$ порождается множеством $\{h(g) \mid g \in \mathbf{G}\}$.

5. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ порождается множеством $\mathbf{G}$, а $h_1\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $h_2\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ гомоморфизмы такие, что $h_1(g) = h_2(g)$ для всех $g \in \mathbf{G}$. Докажите, что тогда $h_1(a) = h_2(a)$ для всех $a \in \mathfrak{A}$.

6. Докажите, что если в алгебре $\mathfrak{A}$ для термов $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ и элементов $a_1, \ldots, a_m$ имеет место равенство $\mathbf{t}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbf{s}(a_1, \ldots, a_m)$, то для всякого гомоморфизма $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{B}$ имеет место равенство $\mathbf{t}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) = \mathbf{s}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$.

Тождество сигнатуры Σ — это выражение $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$, где $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m)$ и $\mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ термы сигнатуры Σ. Тождество $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ выполнено в алгебре $\mathfrak{A}$, если для всяких $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство $\mathbf{t}(a_1, \ldots, a_m) = \mathbf{s}(a_1, \ldots, a_m)$.

7. Выполнены ли следующие тождества в следующих алгебрах:

а) $x + y = y + x$ в алгебре $(\mathbb{Z}, +)$;

б) $x \times y = y \times x$ в алгебре $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$;

в) $x \wedge x = x$ в алгебрах вида $(\mathcal{P}(\mathbf{S}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$;

г) $\underbrace{x + (x + \ldots (x + x}_{m \text{ раз}}) \ldots) = x$ в алгебрах $(\mathbb{Z}_n, +^{\mathbb{Z}}_n)$?

8. Пусть дан гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ алгебр сигнатуры Σ и тождество $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ этой сигнатуры. Верно ли, что всегда

а) если $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ было выполнено в алгебре $\mathfrak{A}$, то оно выполнено и в алгебре $\mathfrak{B}$, в случае когда h сюръекция;

б) если $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ было выполнено в алгебре $\mathfrak{A}$, то оно выполнено и в алгебре $\mathfrak{B}$, в случае когда h инъекция;

в) если $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ было выполнено в алгебре $\mathfrak{B}$, то оно выполнено и в алгебре $\mathfrak{A}$, в случае когда h сюръекция;

г) если $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ было выполнено в алгебре $\mathfrak{B}$, то оно выполнено и в алгебре $\mathfrak{A}$, в случае когда h инъекция?

Произведением алгебр $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}})$ и $\mathfrak{B} = (\mathbf{B}, f_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{B}})$ сигнатуры $\Sigma = (\langle \mathbf{f}_1, k_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{f}_n, k_n \rangle)$ является алгебра $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}, f_1^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}})$, где для всех i от 1 до n, элементов $a_1, \ldots, a_{k_i} \in \mathfrak{A}$ и элементов $b_1, \ldots, b_{k_i} \in \mathfrak{A}$ мы полагаем

$$f_i^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_{k_i}, b_{k_i} \rangle) = \langle f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{k_i}), f_i^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_{k_i}) \rangle.$$

9. Верно ли что следующие алгебры изоморфны:

а)$(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ и $(\mathbb{Z}_4, +)$;

б)$(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ и $(\mathbb{Z}_6, +)$;

в)$(\mathcal{P}(\{a\}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C) \times (\mathcal{P}(\{b\}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$ и $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$;

г)$(\mathbb{R}, \times) \times (\mathbb{R}, \times)$ и $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$;

д)$(\mathbb{R}, \times) \times (\mathbb{R}, \times) \times (\mathbb{R}, \times) \times (\mathbb{R}, \times)$ и $(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$?

10. Пусть даны алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ и тождество $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ этой сигнатуры. Докажите, что $\mathbf{t}(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \ldots, x_m)$ выполнено в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда оно выполнено в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{B}$ одновременно.

Многообразие алгебр $\mathcal{V}$ алгебр сигнатуры Σ, заданное множеством тождеств $\mathbf{E}$ — это совокупность всех алгебр $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ таких, что в них выполнены все тождества из $\mathbf{E}$.

Пример: Многообразие $\mathcal{G}$ всех алгебр сигнатуры $(\langle \mathbf{e}, 0 \rangle, \langle \cdot, 2 \rangle, \langle (\cdot)^{-\mathbf{1}}, 1 \rangle)$, в которых выполнены тождества $(xy)z = x(yz)$, $x\mathbf{e} = x$, $\mathbf{e}x = x$, $xx^{-\mathbf{1}} = \mathbf{e}$ и $x^{-\mathbf{1}}x = \mathbf{e}$ — это совокупность всех групп.

11. Покажите, что для всякого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр сигнатуры Σ:

а) если $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ сюръективный гомоморфизм алгебр сигнатуры Σ и $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$, то $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$;

б) если $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ и $\mathbf{G} \subset \mathfrak{A}$, то подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная $\mathbf{G}$, лежит в $\mathcal{V}$;

в) если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{V}$, то $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \in \mathcal{V}$.

Алгебра $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ называется *свободной* алгеброй многообразия алгебр $\mathcal{V}$ с множеством порождающих $\mathbf{G}$, если алгебра $\mathfrak{A}$ порождена множеством $\mathbf{G}$, а также для всякой алгебры $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$ и функции $u\colon \mathbf{G} \to \mathfrak{B}$ существует гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такой, что для всякого $g \in \mathbf{G}$ мы имеем $u(g) = h(g)$.

12. Докажите, что

а) алгебра $(\mathbb{N}, S)$, где $S(n) = n + 1$ является свободной алгеброй, порожденной множеством $\{0\}$ многообразия $\mathcal{V}$ всех алгебра сигнатуры $(\langle S, 1\rangle)$;

б) алгебра $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ является свободной алгеброй, порожденной множеством $\{1\}$ многообразия $\mathcal{V}$ алгебра сигнатуры $(\langle +, 2\rangle)$ в которых выполнена коммутативность $x + y = y + x$ и ассоциативность $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Пусть дано семейство множеств $\langle \mathbf{A}_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$. Тогда мы обозначаем через $\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathbf{A}_e$ множество всевозможных семейств элементов $\langle a_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$ таких, что каждый элемент $a_e \in \mathbf{A}_e$.

Пусть дано семейство алгебр $\langle \mathfrak{A}_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$ сигнатуры $\Sigma = (\langle \mathbf{f}_1, k_1\rangle, \dots, \langle \mathbf{f}_n, k_n\rangle)$, где $\mathfrak{A}_e = (\mathbf{A}_e, f_1^e, \dots, f_n^e)$. Тогда мы обозначаем через $\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathfrak{A}_e$ алгебру $(\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathbf{A}_e, f_1^{\mathbf{E}}, \dots, f_n^{\mathbf{E}}))$ сигнатуры Σ, где для всех i от 1 до n и семейств элементов $\langle a_e^1 \mid i \in \mathbf{E}\rangle, \dots, \langle a_e^{k_i} \mid e \in \mathbf{E}\rangle \in \prod\limits_{e\in\mathbf{E}}$ мы полагаем

$$f_i^{\mathbf{E}}(\langle a_e^1 \mid i \in \mathbf{E}\rangle, \dots, \langle a_e^{k_i} \mid e \in \mathbf{E}\rangle) = \langle f_i^e(a_e^1, \dots, a_e^{k_i}) \mid i \in \mathbf{E}\rangle.$$

13. Докажите, что всякая булева алгебра множеств $(\mathcal{P}(\mathbf{S}), \emptyset, \mathbf{S}, \cap, \cup, (\cdot)^C)$ изоморфна $\prod\limits_{s\in\mathbf{S}} \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_2 = (\{0, 1\}, 0, 1, \wedge, \vee, \neg)$.

14. Пусть дано семейство алгебр $\langle \mathfrak{A}_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$ сигнатуры Σ и тождество $\mathbf{t}(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \dots, x_m)$ этой сигнатуры. Докажите, что $\mathbf{t}(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{s}(x_1, \dots, x_m)$ выполнено в $\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathfrak{A}_e$ тогда и только тогда, когда оно выполнено во всех $\mathfrak{A}_e$ одновременно.

15. Покажите, что для всякого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр сигнатуры Σ и семейства алгебр $\langle \mathfrak{A}_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$ алгебра $\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathfrak{A}_e$ лежит в $\mathcal{V}$.

16. Пусть дано семейство алгебр $\langle \mathfrak{A}_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle$ сигнатуры Σ, где $\mathfrak{A}_e = (\mathbf{A}_e, f_1^e, \dots, f_n^e)$. Для $s \in \mathbf{E}$ обозначим через π_s функцию $\pi_s(\langle a_e \mid e \in \mathbf{E}\rangle) = a_s$. Покажите, что для всякого $s \in \mathbf{E}$, отображение π_s — это сюръективный гомоморфизм $\pi_s\colon \prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathbf{A}_e \to \mathfrak{A}_s$

17. Докажите, что всякая алгебра сигнатуры Σ, порожденная множеством порождающих $\mathbf{G}$, изоморфна некоторой алгебре носителем которой является некоторое подмножество множества всех записей вида $\mathbf{t}(g_1, \dots, g_n)$, где $\mathbf{t}(x_1, \dots, x_n)$ терм сигнатуры Σ, а $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}$.

18. Докажите, что во всяком многообразие алгебр $\mathcal{V}$ и для всякого множества $\mathbf{G}$ найдется свободная алгебра, порожденная $\mathbf{G}$.

Указание: Рассмотрите произведение $\prod\limits_{e\in\mathbf{E}} \mathfrak{A}_e$, где алгебры $\mathfrak{A}_e$ пробегают всевозможные алгебры из термов из задачи 17. Далее выделите алгебру изоморфную нужной в качестве подалгебры этого произведения.

19. * (*теорема Биркгофа*) Докажите, что всякая совокупность алгебр замкнутая относительно индексированных произведений, сюръективных гомоморфных образов и подалгебр является многообразием.