Сложность булевых схем

Булевой схемой называется ориентированный граф без циклов, в котором

1) всякой вершине входной степени 0 приписана булева переменная;
2) всякой вершине ненулевой входной степени приписана одна из булевых функций **И**, **ИЛИ**, **НЕ**, первые две от произвольного числа переменных; при этом функция **НЕ** может быть приписана только вершинам входной степени 1.
3) часть вершин графа помечены как *выходные*; при этом они упорядочены, то есть есть первая выходная вершина, вторая выходная вершина и т. д.

Булева схема вычисляет некоторую булеву функцию, определяемую следующим образом. Переменными функции являются переменные, приписанные входным вершинам схемы. Для всех вершин графа мы индуктивно определяем функцию, вычисляемую в этой вершине: входная вершина, помеченная переменной x_1, вычисляет функцию $f(x) = x_1$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$; если в вершину v входят ребра из вершин $v_1, \dots, v_k$ и функции $f_{v_1}(x), \dots, f_{v_k}(x)$, вычисляемые в вершинах $v_1, \dots, v_k$, определены, то функция, вычисляемая в вершине v, равна $f_v(x) = g(f_{v_1}(x), \dots, f_{v_k}(x))$, где g – функция приписанная вершине v. Наконец, булева схема с n входными переменными и m выходными переменными вычисляет булеву функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$, такую что $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, где $f_i(x)$ – функция, вычисляемая в i-ой выходной вершине.

Булева схема называется схемой ограниченной входной степени, если входные степени всех вершин не превышают 2.

Размером булевой схемы будем называть число не входных вершин в ней. Глубиной булевой схемы будем называть длину наибольшего пути из входной вершины в выходную.

1. а) Постройте схему для константы 0, то есть схему, выдающую 0 на всех входах. **б)** Схемы какого размера для этого достаточно?

2. а) Постройте схему для функции от двух переменных x и y, равную 1 тогда и только тогда, когда $x \neq y$. **б)** Схемы какого размера для этого достаточно?

Во всех последующих задачах, когда говорится о булевой функции подразумевается, что задана последовательность функций $f_n\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{m(n)}$ для всех натуральных n.

3. а) Постройте булеву схему, вычисляющую функцию **ЧЕТНОСТЬ**, которая на входе $x_1, \dots, x_n$ равна $\sum x_i \pmod 2$. **б)** Постройте схему ограниченной входной степени и глубины $O(\log n)$ для этой функции.

4. Всякую ли функцию можно вычислить схемой ограниченной входной степени и глубины $O(1)$?

5. а) Докажите, что всякую функцию можно вычислить схемой глубины 3. **б)** Всегда ли можно обойтись глубиной 2?

6. Докажите, что всякая схема с одним выходом ограниченной входной степени и глубины $O(\log n)$ имеет полиномиальный размер.

7. Докажите, что всякую схему неограниченной входной степени, глубины $O(1)$ и полиномиального размера можно переделать в схему ограниченной входной степени, глубины $O(\log n)$ и полиномиального размера (обратное не верно, но доказательство этого нетривиально).

8. а) Постройте схему, вычисляющую сумму двух n-битовых чисел. **б)** Постройте схему ограниченной входной степени и глубины $O(\log n)$. **в)** Постройте схему полиномиального размера неограниченной входной степени и глубины $O(1)$.

9. Постройте для функции сложения n n-битовых чисел схему **а)** неограниченной входной степени, полиномиального размера и глубины $O(\log n)$; **б)** ограниченной входной степени, полиномиального размера и глубины $O(\log n)$.

10. Постройте булеву схему полиномиального размера, ограниченной входной степени и логарифмической глубины для **а)** функции, вычисляющей произведение двух n-битовых чисел; **б)** функции **ГОЛОСОВАНИЕ**, которая на входе $x_1, \dots, x_n$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди переменных единиц больше чем нулей.

11. Докажите, что всякая схема ограниченной входной степени, вычисляющая функцию **ЧЕТНОСТЬ** имеет размер не меньше $3(n-1)$.

12. Докажите, что всякую функцию от n переменных с одним выходом можно вычислить **а)** схемой размера $O(n2^n)$; **б)** схемой размера $O(2^n)$.

13. Докажите, что существует функция от n переменных с одним выходом, которую нельзя вычислить схемой размера меньше $\varepsilon 2^n/n$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

14. Докажите, что всякую схему полиномиального размера можно переделать в схему полиномиального размера, в которой отрицания применяются только к входным переменным.

Для булевых векторов $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \{0,1\}^n$ будем писать $x \leq y$, если для всякого i выполняется $x_i \leq y_i$. Булева функция f называется *монотонной*, если для всяких $x \leq y$ верно $f(x) \leq f(y)$. Булеву схему будем называть *монотонной*, если она состоит только из функций **И** и **ИЛИ** (другими словами, монотонная схема – это схема без отрицаний).

15. а) Докажите, что всякая монотонная схема вычисляет монотонную булеву функцию. **б)** Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить какой-нибудь монотонной булевой схемой.

16. Постройте монотонную булеву схему полиномиального размера для функции **ГОЛОСОВАНИЕ**.

17. а) Постройте схему, вычисляющую функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ и использующую только одно отрицание. **б)** Постройте схем, вычисляющую функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и использующую $O(\log n)$ отрицаний. **в)** Можно ли обойтись меньшим числом отрицаний?