Коммуникационная сложность

Рассмотрим следующую модель: Алиса и Боб хотят вычислить функцию $f\colon X \times Y \to Z$, где $X,\ Y,\ Z$ – конечные множества. Сложность состоит в том, что Алиса знает только $x \in X$, а Боб только $y \in Y$, так что, вообще говоря, чтобы вычислить функцию им необходимо обмениваться информацией. Такой обмен должен происходить по некоторому набору правил, называемому *протоколом*. В ходе выполнения протокола Алиса и Боб по очереди посылают друг другу сообщения – строки из нулей и единиц. Протокол заранее фиксирует, кто посылает первое сообщение, а также фиксирует последовательность $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, где $k_i \in \mathbb{N}$. Сообщение с номером i должно иметь длину k_i. Кроме того, протокол должен определять, какие именно сообщения посылают Алиса и Боб в зависимости от их входных данных и сообщений, уже переданных к этому моменту. В конце и Алиса, и Боб должны знать значение функции. Мы считаем что Алиса и Боб обладают неограниченными вычислительными возможностями и изучаем только количество битов, которыми они должны обменяться для вычисления той или иной функции. *Сложностью* протокола называется общее количество переданных битов $\sum_i k_i$. *Коммуникационной сложностью* функции f называется минимальная сложность протокола, вычисляющего f. Коммуникационная сложность функции f обозначается через $\mathrm{cc}(f)$.

1. Для всякой функции $f\colon X \times Y \to Z$ докажите, что $\mathrm{cc}(f) \leqslant \lceil \log|X| \rceil + \lceil \log|Z| \rceil$.

2. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и хотят вычислить функцию $\mathrm{MAX}(x, y) = \max(x \cup y)$. Доказать, что $\mathrm{cc}(MAX) \leqslant 2\log n$.

3. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Функцию $\mathrm{AVG}(x, y)$ равна среднему арифметическому чисел в мультимножестве $x \cup y$. Доказать, что $\mathrm{cc}(\mathrm{AVG}) = O(\log n)$.

4. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Функция $\mathrm{MED}(x, y)$ определяется как медиана (средний элемент) в мультимножестве $x \cup y$. Доказать, что **а)** $\mathrm{cc}(\mathrm{MED}) = O(\log^2 n)$; **б)** $\mathrm{cc}(\mathrm{MED}) = O(\log n)$.

5. Пусть функция $f\colon X \times Y \to Z$ сюръективна. Докажите, что $cc(f) \geqslant \log|Z|$.

6. Пусть $x, y \in \{0,1\}^n$. Функция $\mathrm{EQ}(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x = y$. Докажите, что $\mathrm{cc}(EQ) = n + 1$.

7. Пусть $x, y \in \{0,1\}^n$. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x \geqslant y$, как числа в двоичной записи. Найдите, чему равна $\mathrm{cc}(GT)$.

8. Пусть $x, y \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Функция $\mathrm{DISJ}(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x \cap y = \emptyset$. Найдите, чему равна $\mathrm{cc}(DISJ)$.

Пусть $f\colon X \times Y \to \{0,1\}$. Множество $S \subseteq X \times Y$ называется *трудным множеством*, если существует $z \in \{0,1\}$, такое что

- Для всех $(x, y) \in S$ верно $f(x, y) = z$.
- Для всяких различных $(x_1, y_1) \in S$ и $(x_2, y_2) \in S$ верно $f(x_1, y_2) \neq z$ или $f(x_2, y_1) \neq z$.

9. а) Докажите, что если у f есть трудное множество размера t, то $\mathrm{cc}(f) \geqslant \log_2 t$. **б)** Решите три предыдущие задачи с помощью трудных множеств.

Пороговый элемент задается набором целых чисел $w_1, \ldots, w_n, \theta$. На входных булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ он вычисляет результат сравнения $\sum_{i=1}^n w_i x_i > \theta$, то есть выдает 1, если неравенство верно, и 0 иначе. *Весом* порогового элемента называется $\sum |w_i|$.

10. Докажите, что функцию GT можно вычислить пороговым элементом.

11. Пусть функция GT вычисляется будевой схемой размера S из пороговых элементов. Пусть W максимальный вес порогового элемента в этой схеме. Докажите, что $S \cdot \log W = \Omega(n)$.