

Коммуникационная сложность

Рассмотрим следующую модель: Алиса и Боб хотят вычислить функцию $f: X \times Y \rightarrow Z$, где X, Y, Z – конечные множества. Сложность состоит в том, что Алиса знает только $x \in X$, а Боб только $y \in Y$, так что, вообще говоря, чтобы вычислить функцию им необходимо обмениваться информацией. Такой обмен должен происходить по некоторому набору правил, называемому *протоколом*. В ходе выполнения протокола Алиса и Боб по очереди посылают друг другу сообщения – строки из нулей и единиц. Протокол заранее фиксирует, кто посылает первое сообщение, а также фиксирует последовательность (k_1, k_2, \dots, k_s) , где $k_i \in \mathbb{N}$. Сообщение с номером i должно иметь длину k_i . Кроме того, протокол должен определять, какие именно сообщения посылают Алиса и Боб в зависимости от их входных данных и сообщений, уже переданных к этому моменту. В конце и Алиса, и Боб должны знать значение функции. Мы считаем что Алиса и Боб обладают неограниченными вычислительными возможностями и изучаем только количество битов, которыми они должны обменяться для вычисления той или иной функции. *Сложностью* протокола называется общее количество переданных битов $\sum_i k_i$. *Коммуникационной сложностью* функции f называется минимальная сложность протокола, вычисляющего f . Коммуникационная сложность функции f обозначается через $cc(f)$.

1. Для всякой функции $f: X \times Y \rightarrow Z$ докажите, что $cc(f) \leq \lceil \log |X| \rceil + \lceil \log |Z| \rceil$.
2. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \dots, n\}$ и хотят вычислить функцию $MAX(x, y) = \max(x \cup y)$. Доказать, что **а)** $cc(MAX) \leq 2 \lceil \log n \rceil$; **б)** $cc(MAX) \leq \frac{3}{2} \lceil \log n \rceil$; **в)** $cc(MAX) \leq \lceil \log n \rceil + O(\sqrt{\log n})$.
3. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \dots, n\}$. Функцию $AVG(x, y)$ равна среднему арифметическому чисел в мультимножестве (то есть в множестве, в которое каждый элемент может входить несколько раз) $x \cup y$. Доказать, что $cc(AVG) = O(\log n)$.
4. Пусть Алиса и Боб получают подмножества $x, y \subseteq \{1, \dots, n\}$. Функция $MED(x, y)$ определяется как медиана (средний элемент) в мультимножестве $x \cup y$. Доказать, что **а)** $cc(MED) = O(\log^2 n)$; **б)** $cc(MED) = O(\log n)$.
5. Пусть $x, y \in \{0, 1\}^n$. Функция $EQ(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x = y$. Докажите, что $cc(EQ) = n + 1$.
6. Пусть $x, y \in \{0, 1\}^n$. Функция $GT(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x \geq y$, как числа в двоичной записи. Найдите, чему равна $cc(GT)$.
7. Пусть $x, y \subseteq \{1, \dots, n\}$. Функция $DISJ(x, y)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $x \cap y = \emptyset$. Найдите, чему равна $cc(DISJ)$.
8. Пусть функция $f: X \times Y \rightarrow Z$ сюръективна. Докажите, что $cc(f) \geq \log |Z|$.

Пусть $f: X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$. Множество $S \subseteq X \times Y$ называется *трудным множеством*, если существует $z \in \{0, 1\}$, такое что

- Для всех $(x, y) \in S$ верно $f(x, y) = z$.
- Для всяких различных $(x_1, y_1) \in S$ и $(x_2, y_2) \in S$ верно $f(x_1, y_1) \neq z$ или $f(x_2, y_1) \neq z$.

9. **а)** Докажите, что если у f есть трудное множество размера t , то $cc(f) \geq \log_2 t$. **б)** Решите три предыдущие задачи с помощью трудных множеств.

Пороговый элемент задается набором целых чисел w_1, \dots, w_n, θ . На входных булевых переменных x_1, \dots, x_n он вычисляет результат сравнения $\sum_{i=1}^n w_i x_i > \theta$, то есть выдает 1, если неравенство верно, и 0 иначе. *Весом* порогового элемента называется $\sum |w_i|$.

10. Докажите, что функцию GT можно вычислить пороговым элементом.
11. Пусть функция GT вычисляется булевой схемой размера S из пороговых элементов. Пусть W максимальный вес порогового элемента в этой схеме. Докажите, что $S \cdot \log W = \Omega(n)$.

Пусть протокол разрешает каждому из Алисы и Боба в процессе обмена сообщениями подбрасывать монету и действовать по-разному при разных исходах бросания. Назовем такой протокол *вероятностным*. Будем говорить, что такой коммуникационный протокол вычисляет функцию $f : X \times Y \rightarrow Z$ с вероятностью ошибки менее $1/3$, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ в результате выполнения протокола Алиса и Боб узнают значение $f(x, y)$ с вероятностью не менее $2/3$ (вероятность берётся по случайным бросаниям монет Алисы и Боба).

- 12.** Докажите, что функция $\text{EQ}(x, y)$ имеет вероятностную коммуникационную сложность $O(\log n)$.
- 13.** Пусть $x, y \in \{0, 1\}^n$ и пусть заранее известно, что хемминговское расстояние между x и y (число позиций, в которых x и y различаются) не превосходит $0.1n$. Алиса хочет сообщить своё слово Бобу (иначе говоря, Бобу нужно вычислить значение функции $f(x, y) = x$). Докажите, что вероятностная коммуникационная сложность этой задачи не меньше $0.01n$.