Вычислимость

Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *вычислима*, если она вычисляется каким-нибудь алгоритмом (например, записанным на каком-нибудь известном вам языке программирования). Функция не обязана быть всюду определённой; не всюду определённые функции соответствуют алгоритмам, которые не заканчивают работу ("зацикливаются") на некоторых входах.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ *разрешимо*, если существует алгоритм, который про каждое натуральное число может сказать, принадлежит ли оно множеству A или нет.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ *перечислимо*, если существует алгоритм, которому ничего не подаётся на вход, и который, будучи запущенным, время от времени печатает элементы множества A; алгоритм не обязан заканчивать работу, но каждый элемент множества A должен когда-нибудь появиться на выходе алгоритма.

Аналогично можно определить вычислимые функции с областью определения и/или областью значений $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, Σ^*, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и так далее. То же и с разрешимостью и перечислимостью.

1. Перечислимо ли пустое множество? Разрешимо ли? Те же вопросы про множество $\mathbb{N}$.

2. Докажите, что следующие функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислимы:
а) $f(n) = c$; **б)** $f(n) = 3n$; **в)** $f(n) = n^3$; **г)** $f(n) = \sqrt{n}$; **д)** $f(n) = 2^n$; **е)** $f(n) = n!$; **ж)** $f(n) = n^{n^n}$; **з)** $f(n) =$ "n-й знак после запятой десятичной записи числа π"; **и)** $f(n) = 1 + \operatorname{sgn} \sin n$.

3. Докажите, что следующие множества разрешимы:
а) $\{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$; **б)** $\{n! : n \in \mathbb{N}\}$; **в)** множество простых чисел; **г)** множество примитивных слов.

4. Докажите, что следующие множества перечислимы:
а) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = z^2$ для какого-то $z\}$; **б)** $\{(x, y) : x^{100} + y^{100} = z^{100}$ для какого-то $z\}$; **в)** множество конечных слов, содержащих квадрат какого-нибудь слова.
Как вы думаете, являются ли эти множества разрешимыми?

5. а) Перечислимо ли множество всех таких n, что в десятичной записи числа $\sqrt{2}$ найдётся n цифр 9 подряд? **б)** Разрешимо ли это множество?

6. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p,\, p+2 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

7. Существуют ли невычислимые функции? Неразрешимые множества? Неперечислимые множества?

8. Докажите, что **а)** объединение **б)** пересечение перечислимых множеств перечислимо.
в) Докажите, что дополнение разрешимого множества разрешимо.

9. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно и его дополнение перечислимы.

10. Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно является **а)** областью определения вычислимой функции **б)** областью значений вычислимой функции **в)** проекцией разрешимого множества пар чисел (x, y) на один из аргументов.

11. Докажите что **а)** образ **б)** прообраз перечислимого множества под действием вычислимой функции перечислим.

12. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

13. Докажите, что существует вычислимая функция двух аргументов $f(n, m)$, такая что среди функций $f_n = f(n, \cdot)$ встречаются все возможные вычислимые функции (возможно, не один раз).

14. Верно ли, что дополнение перечислимого множества всегда перечислимо?