Вычислимость

Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *вычислима*, если она вычисляется каким-нибудь алгоритмом (например, записанным на каком-нибудь известном вам языке программирования). Функция не обязана быть всюду определённой; не всюду определённые функции соответствуют алгоритмам, которые не заканчивают работу ("зацикливаются") на некоторых входах или заканчивают, но не выдают ответа.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ *разрешимо*, если существует алгоритм, который про каждое натуральное число может сказать, принадлежит ли оно множеству A или нет.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ *перечислимо*, если существует алгоритм, которому ничего не подаётся на вход, и который, будучи запущенным, время от времени печатает элементы множества A; алгоритм не обязан заканчивать работу, но каждый элемент множества A должен когда-нибудь появиться на выходе алгоритма.

Аналогично можно определить вычислимые функции с областью определения и/или областью значений $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, Σ^*, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и так далее. То же и с разрешимостью и перечислимостью.

1. Перечислимо ли пустое множество? Разрешимо ли? Те же вопросы про множество $\mathbb{N}$.

2. Вычислимы ли следующие функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
a) $f(n) = c$; **b)** $f(n) = 3n$; **c)** $f(n) = n^3$; **d)** $f(n) = \sqrt{n}$; **e)** $f(n) = 2^n$; **f)** $f(n) = n!$; **g)** $f(n) = n^{n^n}$; **h)** $f(n) =$ "n-й знак после запятой десятичной записи числа π"; **i)** $f(n) = 1 + \operatorname{sgn} \sin n$?

3. Разрешимы ли следующие множества:
a) $\{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$; **b)** $\{n! : n \in \mathbb{N}\}$; **c)** множество простых чисел?

4. Перечислимы ли следующие множества:
a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = z^2$ для какого-то $z\}$; **b)** $\{(x, y) : x^{100} + y^{100} = z^{100}$ для какого-то $z\}$; **c)** $\{(x, y, z) : x^n + y^n = z^n$ для какого-то $n\}$?
Являются ли эти множества разрешимыми?

5. Докажите, что **a)** объединение; **b)** пересечение перечислимых множеств перечислимо.
c) Докажите, что дополнение разрешимого множества разрешимо.

6. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно и его дополнение перечислимы.

7. a) Перечислимо ли множество всех таких n, что в десятичной записи числа π найдётся хотя бы n цифр 9 подряд? **b)** Разрешимо ли это множество?

8. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p,\ p+2 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

9. Докажите, что всякая всюду определенная невозрастающая функция вычислима.

10. Существуют ли невычислимые функции? Неразрешимые множества? Неперечислимые множества?

11. Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно является **a)** областью определения вычислимой функции; **b)** областью значений вычислимой функции; **c)** проекцией разрешимого множества пар чисел (x, y) на один из аргументов.

12. Докажите, что **a)** образ; **b)** прообраз перечислимого множества под действием вычислимой функции перечислим.

13. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

14. Существует ли бесконечное множество, не содержащее бесконечных разрешимых подмножеств?

15. Докажите, что существует вычислимая функция двух аргументов $f(n, m)$, такая что среди функций $f_n = f(n, \cdot)$ встречаются все возможные вычислимые функции (возможно, не один раз).

16. Верно ли, что дополнение перечислимого множества всегда перечислимо?