

## Деревья разрешения

Пусть  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  – некоторая булева функция. Будем обозначать ее входные переменные через  $x_1, \dots, x_n$ . *Деревом разрешения*  $T$ , вычисляющим функцию  $f$ , называется дерево, в котором каждая внутренняя вершина помечена какой-нибудь переменной  $x_i$ , из каждой вершины выходит два ребра, одно из них помечено 0, другое 1. Каждый лист дерева помечен либо 0, либо 1. Вычисление на конкретном наборе входных переменных происходит следующим образом: в начале вычисления мы находимся в корне дерева. Находясь в какой-либо вершине, мы смотрим значение переменной  $x_i$ , соответствующей этой вершине. Если  $x_i = 1$ , мы переходим в следующую вершину по 1-ребру, если же  $x_i = 0$ , мы переходим дальше по 0-ребру. Значение, соответствующее листу, которого мы таким образом достигаем, должно быть равно  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Обозначим через  $\mathcal{T}_f$  множество всех деревьев разрешения, вычисляющих  $f$ . *Сложностью дерева разрешения*  $T$  называется его глубина  $d(T)$ . *Сложностью деревьев разрешения* функции  $f$  называется

$$D(f) = \min_{T \in \mathcal{T}_f} d(T).$$

- а)** Постройте деревья разрешения, вычисляющие функции  $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ ,  $\bigvee_{i=1}^n x_i$ ,  $\bigoplus_{i=1}^n x_i$ . **б)** Докажите, что всякая булева функция вычисляется некоторым деревом разрешения глубины не больше  $n$ .
- Докажите, что **а)**  $D(\bigoplus_{i=1}^n x_i) = n$ ; **б)**  $D(\bigwedge_{i=1}^n x_i) = n$ ; **в)**  $D(\bigvee_{i=1}^n x_i) = n$ .
- Пусть  $n = k + 2^k$ . И пусть функция  $f$  от  $n$  переменных на входе  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2^k}$  выдает  $y_x$ , где  $x$  – число с двоичной записью  $x_1 \dots x_k$ . Докажите, что  $D(f) \leq k + 1$ .

Пусть задана функция  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Обозначим через  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  ее входные переменные. Для всякого  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  обозначим через  $x|_S$  подстроку  $x$ , в которую входят только элементы с номерами из  $S$ . Если  $f(x) = 0$ , то *0-сертификатом* для  $x$  называется такое множество  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ , что  $f(x') = 0$  для всякого  $x'$ , такого что  $x'|_S = x|_S$ . Аналогично, если  $f(x) = 1$ , то *1-сертификатом* для  $x$  называется такое множество  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ , что  $f(x') = 1$  для всякого  $x'$ , такого что  $x'|_S = x|_S$ .

*0-сертификатной сложностью*  $C^0(f)$  функции  $f$  называется такое минимальное  $k$ , что для всякого  $x$ , такого что  $f(x) = 0$ , существует 0-сертификат размера не больше  $k$ . Аналогично, *1-сертификатной сложностью*  $C^1(f)$  функции  $f$  называется такое минимальное  $k$ , что для всякого  $x$ , такого что  $f(x) = 1$ , существует 1-сертификат размера не больше  $k$ . *Сертификатной сложностью*  $C(f)$  функции  $f$  называется  $\max_{i \in \{0, 1\}} C^i(f)$ .

- Найдите  $C^0(f)$  и  $C^1(f)$ , где **а)**  $f(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$ ; **б)**  $f(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$ ; **в)**  $f(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$ .
- Докажите, что для всякой функции  $f$  верно  $C(f) \leq D(f)$ .
- Пусть дана функция  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , а также  $x$  и  $y$ , такие что  $f(x) = 1$ , а  $f(y) = 0$ . Докажите, что всякий 1-сертификат для  $x$  пересекается со всяким 0-сертификатом для  $y$ .
- Докажите, что для всякой функции  $f$  верно  $D(f) \leq C^0(f)C^1(f)$ .
- Пусть функцию  $f$  можно записать в виде  $k$ -ДНФ и в виде  $m$ -КНФ. Докажите, что тогда функцию  $f$  можно вычислить деревом разрешения глубины  $km$ .

Пусть  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  и  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  – ее входные переменные. Мы говорим, что целочисленный многочлен от  $n$  переменных  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  *вычисляет*  $f$ , если для всякого  $x \in \{0, 1\}^n$  верно  $f(x) = p(x)$ . *Степенью*  $\deg(f)$  функции  $f$  мы называем минимальную степень многочлена, вычисляющего  $f$ .

- 9. а)** Найдите многочлены, вычисляющие функции  $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ ,  $\bigvee_{i=1}^n x_i$ ,  $\bigoplus_{i=1}^n x_i$ . **б)** Докажите, что всякая булева функция вычисляется единственным мультилинейным (т.е. линейным по каждой переменной) многочленом. **в)** Докажите, что для всякой булевой функции  $f$  от  $n$  переменных  $\deg(f) \leq n$ .
- 10.** Докажите, что для всякой функции  $f$  верно  $\deg(f) \leq D(f)$ .
- 11.** Докажите, что верхняя оценка в задаче 3 точна.
- 12.** Докажите, что для почти всех булевых функций от  $n$  переменных сложность деревьев разрешения равна  $n$ . То есть, докажите, что доля таких функций  $f$  от  $n$  переменных, что  $D(f) < n$  стремится к нулю при  $n$  стремящемся к бесконечности.
- 13.** Докажите, что всякое дерево разрешения глубины меньше  $n$  для функции  $\bigoplus_{i=1}^n x_i$  ошибается на половине всех входов.