Разрешающие деревья

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – некоторая булева функция. Будем обозначать ее входные переменные через $x_1, \ldots, x_n$. *Разрешающим деревом* T, вычисляющим функцию f, называется двоичное дерево, в котором каждая внутренняя вершина помечена какой-нибудь переменной x_i. Из каждой вершины выходит два ребра, одно из них помечено 0, другое 1. Каждый лист дерева помечен либо 0, либо 1. Вычисление на конкретном наборе входных переменных происходит следующим образом: в начале вычисления мы находимся в корне дерева. Находясь в какой-либо вершине, мы смотрим на значение переменной x_i, соответствующей этой вершине. Если $x_i = 1$, мы переходим в следующую вершину по 1-ребру, если же $x_i = 0$, мы переходим дальше по 0-ребру. Значение, соответствующее листу, которого мы таким образом достигаем, должно быть равно $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $\mathcal{T}_f$ множество всех разрешающих деревьев, вычисляющих f. *Сложностью разрешающего дерева* T называется его глубина $d(T)$. *Сложностью разрешающих деревьев* для функции f называется

$$D(f) = \min_{T \in \mathcal{T}_f} d(T).$$

1. а) Постройте разрешающие деревья, вычисляющие функции $\bigwedge_{i=1}^n x_i$, $\bigvee_{i=1}^n x_i$, $\bigoplus_{i=1}^n x_i$. **б)** Докажите, что всякая булева функция вычисляется некоторым разрешающим деревом глубины не больше n.

2. Докажите, что **а)** $D(\bigoplus_{i=1}^n x_i) = n$; **б)** $D(\bigwedge_{i=1}^n x_i) = n$; **в)** $D(\bigvee_{i=1}^n x_i) = n$.

3. Пусть $n = k + 2^k$. И пусть функция f от n переменных на входе $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{2^k}$ выдает y_x, где x – число с двоичной записью $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что $D(f) \leq k + 1$.

Пусть задана функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и вектор $a \in \{0,1\}^n$. *f-сертификатом для a* называется такое подмножество $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, что для всех векторов $b \in \{0,1\}^n$, таких что $b_i = a_i$ для всех $i \in S$, верно $f(b) = f(a)$. Если $f(a) = 0$, то S называется 0-*сертификатом*, а если $f(a) = 1$ — то 1-*сертификатом.*

0-*сертификатной сложностью* $C^0(f)$ функции f называется такое минимальное k, что для всякого a, такого что $f(a) = 0$, существует 0-сертификат размера не больше k. Аналогично, 1-*сертификатной сложностью* $C^1(f)$ функции f называется такое минимальное k, что для всякого a, такого что $f(a) = 1$, существует 1-сертификат размера не больше k. *Сертификатной сложностью* $C(f)$ функции f называется $\max\{C^0(f), C^1(f)\}$.

4. Найдите $C^0(f)$ и $C^1(f)$, где **а)** $f(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$; **б)** $f(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$; **в)** $f(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

5. Докажите, что для всякой функции f верно $C(f) \leq D(f)$.

6. Пусть дана функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, а также x и y, такие что $f(x) = 1$, а $f(y) = 0$. Докажите, что всякий 1-сертификат для x пересекается со всяким 0-сертификатом для y.

7. Докажите, что для всякой функции f верно $D(f) \leq C^0(f)C^1(f)$.

8. Пусть функцию f можно записать в виде k-ДНФ и в виде m-КНФ. Докажите, что тогда функцию f можно вычислить разрешающим деревом глубины km.

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ – ее входные переменные. Мы говорим, что целочисленный многочлен от n переменных $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *вычисляет* f, если для всякого $x \in \{0,1\}^n$ верно $f(x) = p(x)$. *Степенью* $\deg(f)$ функции f мы называем минимальную степень многочлена, вычисляющего f.

9. а) Найдите многочлены, вычисляющие функции $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$, $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i$. **б)** Докажите, что всякая булева функция вычисляется единственным мультилинейным (т.е. линейным по каждой переменной) многочленом. **в)** Докажите, что для всякой булевой функции f от n переменных $\deg(f) \leq n$.

10. Докажите, что для всякой функции f верно $\deg(f) \leq D(f)$.

11. Докажите, что верхняя оценка в задаче 3 точна.

12. Докажите, что для почти всех булевых функций от n переменных сложность разрешающих деревьев равна n. То есть, докажите, что доля таких функций f от n переменных, что $D(f) < n$ стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

13. Докажите, что всякое разрешающее дерево глубины меньше n для функции $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i$ ошибается на половине всех входов.