12 октября 2012 года

Разрешающие деревья 2

Пусть задана $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и $x \in \{0,1\}^n$. Обозначим через x^i, где $i \in \{1,\ldots,n\}$, набор из $\{0,1\}^n$, отличающийся от x только в i-ой координате. *Чувствительностью* $s_x(f)$ функции f на входе x называется число координат i, таких что $f(x) \neq f(x^i)$. *Чувствительностью* $s(f)$ функции f называется $\max_x s_x(f)$.

Пусть $B \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Обозначим через x^B, набор из $\{0,1\}^n$, отличающийся от x во всех координатах из B и только в них. *Блочной чувствительностью* $bs_x(f)$ функции f на входе x называется максимальное число k непересекающихся блоков $B_1,\ldots,B_k \subseteq \{1,\ldots,n\}$, таких что $f(x) \neq f(x^{B_i})$ для всех i. *Блочной чувствительностью* $s(f)$ функции f называется $\max_x bs_x(f)$.

1. Найдите $s(f)$ и $bs(f)$, где **а)** $f(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$; **б)** $f(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$; **в)** $f(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

2. Докажите, что $s(f) \le bs(f) \le C(f) \le D(f)$.

3. Пусть $n = 4k^2$. Разделим n булевых переменных на $\sqrt{n}$ блоков по $\sqrt{n}$ переменных в каждом: первый блок B_1 состоит из переменных $x_1,\ldots,x_{\sqrt{n}}$, второй блок B_2 состоит из переменных $x_{\sqrt{n}+1,\ldots,2\sqrt{n}}$ и т.д. Положим $f(x) = 1$ на наборе x, если существует хотя бы один блок B_i, в котором две последовательные переменные равны 1, а остальные переменные равны 0. Найдите $s(f)$ и $bs(f)$.

4. (Открытый вопрос.) Верно ли, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $bs(f) = O(s(f)^k)$?

5. а) Докажите, что если для $B \subseteq \{1,\ldots,n\}$ верно, что $f(x) \neq f(x^B)$, и B – минимальное по включению с таким свойством, то $|B| \le s(f)$. **б)** Докажите, что $C(f) \le s(f)bs(f)$.

6. а) Докажите, что $D(f) \le C^1(f)bs(f)$. **б)** Докажите, что $D(f) \le bs(f)^3$.

7. (Открытый вопрос.) Верно ли, что $D(f) = O(bs(f)^2)$?

8. Докажите, что для всякого одночлена M многочлена, вычисляющего функцию f, существует подмножество B индексов переменных M, такое что $f(\overrightarrow{0}^B) \neq f(\overrightarrow{0})$.

9. Докажите, что существует множество переменных размера $\deg(f)bs(f)$, пересекающее всякий одночлен многочлена, вычисляющего f.

10. Докажите, что $D(f) \le deg(f)^2 bs(f)$.

11. Докажите, что $D(f) \le deg(f)C^1(f)$.

Вероятностное разрешающее дерево отличается от обычного (которое называют *детерминированным*, чтобы отличать от вероятностных) тем, что в нем кроме вершин, помеченных переменными, допускаются также вершины не помеченные ничем. Ребра, исходящие из такой вершины, помечены числами p и $1-p$, где $0 < p < 1$. Вычисление в такой вершине происходит следующим образом: с вероятностью p мы переходим по ребру, помеченному числом p, и с вероятностью $1-p$ мы переходим по ребру, помеченному числом $1-p$. В остальном вычисление проходит также как и для детерминированных разрешающих деревьев. Мы говорим, что вероятностное разрешающее дерево T *вычисляет* функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, если для всякого $x \in \{0,1\}^n$ результат вычисления равен $f(x)$ с вероятностью не меньше $2/3$.

Сложностью вероятностного разрешающего дерева T называется максимальное возможное количество вершин, помеченных переменной, встречающееся на каком-либо пути из вершины дерева в лист. *Вероятностной сложностью разрешающих деревьев* $R_2(f)$ функции f называется минимальная сложность вероятностного разрешающего дерева, вычисляющего функцию f.

12. Вероятностное разрешающее дерево можно определить и как вероятностное распределение на детерминированных разрешающих деревьях. Придумайте соответствующие определения и докажите эквивалентность нового определения старому.

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ – ее входные переменные. Мы говорим, что действительный многочлен от n переменных $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *приближает* f, если для всякого $x \in \{0,1\}^n$ верно $|f(x) - p(x)| \leq 1/3$. *Степенью приближения* $\widetilde{\deg}(f)$ функции f мы называем минимальную степень многочлена, приближающего f.

Пусть $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ мультилинейный многочлен от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Симметризацией* многочлена p называется многочлен $p^{sym}(x) = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma(x))}{n!}$, где S_n – множество перестановок на n элементах.

13. Пусть $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ мультилинейный многочлен от n переменных. Тогда существует многочлен $q(z) \in \mathbb{R}[z]$ от одной переменной, такой что для всех $x \in \{0,1\}^n$ верно $p^{sym}(x) = q(\sum_{i=1}^n x_i)$.

14. Докажите, что $\widetilde{\deg}(\bigoplus_{i=1}^n x_i) = n$.

15. Докажите, что $\widetilde{\deg}(f) \leq R_2(f)$.