Диагональные конструкции

1. а) Докажите, что для любой последовательности бесконечных десятичных дробей $0,a_1a_2a_3\ldots$, $0,b_1b_2b_3\ldots$, $0,c_1c_2c_3\ldots$,… найдётся дробь, не встречающаяся в этой последовательности. **б)** Докажите, что (каково бы ни было множество A) не существует взаимно однозначного соответствия между A и множеством всех функций $A \to \{0.1\}$ (или множеством всех подмножеств множества A).

2. Множество точек прямой называется *нигде не плотным*, если внутри всякого интервала можно найти меньший интервал, не пересекающийся с этим множеством. **а)** Докажите, что счётное число нигде не плотных множеств не может покрывать всю плоскость. **б)** Докажите, что не существует функции, непрерывной во всех рациональных и разрывной во всех иррациональных точках. **в)** Последовательность непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ поточечно сходится к функции f (это значит, что $f_n(x) \to f(x)$ для любого x). Докажите, что функция f непрерывна хотя бы в одной точке.

3. а) Постройте взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множеством D “десятично-рациональных” чисел D (чисел вида $m/10^n$ для целых m и натуральных n), сохраняющее порядок (большее число соответствует большему). **б)** Существует ли непрерывное взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при котором $\mathbb{Q}$ переходит в D?

4. а) Докажите, что всякая функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ представима в виде суммы трёх биекций (взаимно однозначных отображений $\mathbb{Z}$ на себя. **б)** Верно ли, что всякая функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ представима в виде суммы двух биекций? **в)** Докажите, что всякая неограниченная функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ представима в виде суммы двух биекций.

5. (Лемма Кёнига) Докажите, что если человечество будет существовать вечно, то существует последовательность женщин, каждая из которых является дочерью предыдущей.

6. а) Требуется раскрасить вершины графа в три цвета так, чтобы концы любого ребра были разных цветов. Докажите. что если бесконечный граф нельзя раскрасить, то некоторую конечную его часть (конечное множество вершин и рёбра, которые их соединяли) тоже нельзя раскрасить. **б)** Имеется конечное число “запрещённых” двоичных слов (последовательностей нулей и единиц). Докажите, что если существует односторонняя бесконечная последовательность $a_0a_1a_2\ldots$, в которую не входит ни одно запрещённое слово, то существует и двусторонняя такая последовательность.

7. а) Докажите, что можно разбить натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечной арифметической прогрессии. **б)** Докажите, что можно разбить натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечного перечислимого подмножества. (Множество перечислимо, если существует программа, печатающая все его элементы и только их.)

8. Все двоичные слова разделены произвольным образом на два класса. Докажите, что любую последовательность нулей и единиц можно разрезать на (конечные) куски так, чтобы все куски (кроме, быть может, первого) принадлежали одному классу.