Игра Эренфойхта

Пусть задана конечная сигнатура S, состоящая только из предикатных символов. Пусть заданы две интерпретации данной сигнатуры. Они называются *элементарно эквивалентными*, если всякая замкнутая формула нашей сигнатуры либо истина в обеих интерпретациях, либо ложна в обеих интерпретациях.

Игра Эренфойхта задается сигнатурой и парой интерпретаций. В игре участвуют два игрока: Новатор (**Н**) и Консерватор (**К**). Сначала Новатор называет натуральное число k. Затем Новатор и Консерватор по очереди делают k ходов и игра заканчивается. На i-ом ходу **Н** выбирает элемент в одной из интерпретаций и помечает его числом i. В ответ **К** выбирает элемент в другой интерпретации и также помечает его числом i. После k ходов в каждой интерпретации k элементов оказываются помеченными числами $1, \ldots, k$. Обозначим эти элементы через $a_1, \ldots, a_k$ в первой интерпретации и через $b_1, \ldots, b_k$ во второй. Элементы a_i и b_i будем называть соответствующими друг другу. Победитель в игре определяется следующим образом: если существует предикат сигнатуры, который истинен на некотором наборе помеченных элементов одной сигнатуры и ложен на соответствующих элементах другой, то выигрывает **Н**. В противном случае выигрывает **К**.

1. Определите кто выигрывает в следующих играх Эренфойхта:
а) сигнатура $(=)$, интерпретации $\{1, \ldots, k\}$ и $\{1, \ldots, n\}$;
б) сигнатура $(=, <)$, интерпретации $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$;
в) сигнатура $(=, <)$, интерпретации $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$;
г) сигнатура $(=, <)$, интерпретации $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} + \mathbb{N}$;
д) сигнатура $(=, <)$, интерпретации $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

2. Пусть дана сигнатура и две изоморфные интерпретации. Кто выигрывает в соответствующей игре Эренфойхта?

3. Пусть задана сигнатура $(=, <)$ и интерпретации $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Кто выигрывает в соответствующей игре Эренфойхта?

Кванторной глубиной формулы первого порядка называется максимальная длина цепочки вложенных кванторов в этой формуле.

4. Дайте формальное определение кванторной глубины.

Пусть **Н** и **К** играют в некоторую игру Эренфойхта. Пусть в начале **Н** объявил, что будет сделано $k + l$ ходов, и пусть игроки уже сделали по k ходов. В этот момент в интерпретациях уже выбрано по k элементов: $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$.

5. Докажите, что если существует формула нашей сигнатуры с параметрами $x_1, \ldots, x_k$, отличающая $a_1, \ldots, a_k$ от $b_1, \ldots, b_k$, то существует формула ϕ той же кванторной глубины, которая также отличает эти два набора и при этом имеет вид $\phi = \exists\xi\psi$, где ξ – переменная.

6. Докажите, что если существует формула глубины l нашей сигнатуры с параметрами $x_1, \ldots, x_k$, отличающая $a_1, \ldots, a_k$ от $b_1, \ldots, b_k$, то в указанной позиции **Н** имеет выигрышную стратегию.

Две формулы в нашей сигнатуре называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или ложны в любой интерпретации на любой оценке.

7. Докажите, что для всякого натурального l и для всякого набора переменных $x_1, \ldots, x_n$ в нашей сигнатуре существует лишь конечное число неэквивалентных формул глубины l с параметрами $x_1, \ldots, x_n$.

8. Докажите, что если все формулы глубины l нашей сигнатуры с параметрами $x_1, \ldots, x_k$, совпадают на наборах $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$, то в указанной позиции **К** имеет выигрышную стратегию.

9. Докажите, что интерпретации A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в соответствующей игре Эренфойхта выигрывает консерватор.

10. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{N}, \leq, y = x+1)$ и $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, \leq, y = x+1)$ элементарно эквивалентны.
б) Выведите из этого, что для всякой формулы первого порядка $\phi(x)$ с одной свободной переменной в сигнатуре $(\leq, y = x + 1)$ и интерпретации $\mathbb{N}$ множество тех n, на которых формула истинна, конечно или является дополнением конечного.