

Игра Эренфойхта

Пусть задана конечная сигнатура S , состоящая только из предикатных символов. Пусть заданы две интерпретации данной сигнатуры. Они называются *элементарно эквивалентными*, если всякая замкнутая формула нашей сигнатуры либо истина в обеих интерпретациях, либо ложна в обеих интерпретациях.

Игра Эренфойхта задается сигнатурой и парой интерпретаций. В игре участвуют два игрока: Новатор (**Н**) и Консерватор (**К**). Сначала Новатор называет натуральное число k . Затем Новатор и Консерватор по очереди делают k ходов и игра заканчивается. На i -ом ходу **Н** выбирает элемент в одной из интерпретаций и помечает его числом i . В ответ **К** выбирает элемент в другой интерпретации и также помечает его числом i . После k ходов в каждой интерпретации k элементов оказываются помеченными числами $1, \dots, k$. Обозначим эти элементы через a_1, \dots, a_k в первой интерпретации и через b_1, \dots, b_k во второй. Элементы a_i и b_i будем называть соответствующими друг другу. Победитель в игре определяется следующим образом: если существует предикат сигнатуры, который истинен на некотором наборе помеченных элементов одной сигнатуры и ложен на соответствующих элементах другой, то выигрывает **Н**. В противном случае выигрывает **К**.

1. Определите кто выигрывает в следующих играх Эренфойхта:

- а) сигнатура $(=)$, интерпретации $\{1, \dots, k\}$ и $\{1, \dots, n\}$;
- б) сигнатура $(=, <)$, интерпретации \mathbb{N} и \mathbb{Z} ;
- в) сигнатура $(=, <)$, интерпретации \mathbb{Z} и \mathbb{Q} ;
- г) сигнатура $(=, <)$, интерпретации \mathbb{N} и $\mathbb{N} + \mathbb{N}$;
- д) сигнатура $(=, <)$, интерпретации \mathbb{Z} и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

2. Пусть дана сигнатура и две изоморфные интерпретации. Кто выигрывает в соответствующей игре Эренфойхта?

3. Пусть задана сигнатура $(=, <)$ и интерпретации \mathbb{Q} и \mathbb{R} . Кто выигрывает в соответствующей игре Эренфойхта?

Кванторной глубиной формулы первого порядка называется максимальная длина цепочки вложенных кванторов в этой формуле.

4. Дайте формальное определение кванторной глубины.

Пусть **Н** и **К** играют в некоторую игру Эренфойхта. Пусть в начале **Н** объявил, что будет сделано $k + l$ ходов, и пусть игроки уже сделали по k ходов. В этот момент в интерпретациях уже выбрано по k элементов: a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_k .

5. Докажите, что если существует формула нашей сигнатуры с параметрами x_1, \dots, x_k , отличающая a_1, \dots, a_k от b_1, \dots, b_k , то существует формула ϕ той же кванторной глубины, которая также отличает эти два набора и при этом имеет вид $\phi = \exists \xi \psi$, где ξ – переменная.

6. Докажите, что если существует формула глубины l нашей сигнатуры с параметрами x_1, \dots, x_k , отличающая a_1, \dots, a_k от b_1, \dots, b_k , то в указанной позиции **Н** имеет выигрышную стратегию.

Две формулы в нашей сигнатуре называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или ложны в любой интерпретации на любой оценке.

7. Докажите, что для всякого натурального l и для всякого набора переменных x_1, \dots, x_n в нашей сигнатуре существует лишь конечное число неэквивалентных формул глубины l с параметрами x_1, \dots, x_n .

8. Докажите, что если все формулы глубины l нашей сигнатуры с параметрами x_1, \dots, x_k совпадают на наборах a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_k , то в указанной позиции **К** имеет выигрышную стратегию.

9. Докажите, что интерпретации A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в соответствующей игре Эренфойхта выигрывает консерватор.

10. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{N}, \leq, y = x + 1)$ и $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ элементарно эквивалентны.
б) Выведите из этого, что для всякой формулы первого порядка $\phi(x)$ с одной свободной переменной в сигнатуре $(\leq, y = x + 1)$ и интерпретации \mathbb{N} множество тех n , на которых формула истинна, конечно или является дополнением конечного.

11. а) Докажите, что интерпретации $(\mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq, y = x + 1)$ элементарно эквивалентны.
б) Выведите из этого, что отношение \leq в \mathbb{Z} не выражается через отношение $y = x + 1$.
в) Выражается ли отношение $y = x + 1$ через \leq ?
г) Выражается ли отношение \leq через $y = x + 1$ в \mathbb{N} ?

12. а) Приведите пример элементарно эквивалентных, но неизоморфных интерпретаций сигнатуры $(+, \times, =)$.

б) Приведите пример не элементарно эквивалентных интерпретаций сигнатуры $(+, \times, =)$.

13. а) Приведите пример элементарно эквивалентных, но неизоморфных интерпретаций сигнатуры $(+, <, =)$.

б) Приведите пример не элементарно эквивалентных интерпретаций сигнатуры $(+, <, =)$.