

Игры и стратегии

В игре в каждый момент должно быть ясно, кто должен сделать ход и какие ходы он может сделать. Если вся игра сыграна (не обязательно, как мы потом увидим, для этого понадобится лишь конечное время), надо знать, кто выиграл. Будем рассматривать игры с двумя игроками, делающими ходы по очереди.

1. На шахматной доске находится

- а) ладья, которой разрешено ходить только вниз и влево,
- б) король, которому разрешено ходить только вниз, влево, и по диагонали вниз-влево,
- в) ферзь, с теми же ограничениями,
- г) конь, которому разрешено ходить только вниз-влево.

Проигрывает игрок, который не может сделать ход. При каких начальных позициях первый игрок выигрывает? Тот же вопрос для доски $n \times n$.

2. Два игрока по очереди берут из кучи камней от 1 до 3 камней за ход по своему выбору. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Изначально в куче n камней. Какие оптимальные стратегии игроков?

3. “Ним”. Есть несколько куч камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из одной кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какие выигрышные стратегии у игроков?

Полезный минимальный случай для ручного разбора — игра с тремя кучами по четыре камня (или по пять — не забудьте про симметрию).

4. На шахматной доске 3 на 3 клетки стоят на крайних горизонталях по 3 белые и чёрные пешки. Пешки не имеют права на первый ход через клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; сумевший провести пешку на дальний край доски выигрывает. У какого игрока есть выигрышная стратегия и какая?

5. Есть ориентированный граф без циклов, из каждой вершины по стрелкам достижимо конечное число вершин. Позиции — вершины, ходы — стрелки, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что для любой начальной позиции у одного из игроков есть выигрышная стратегия, опишите её.

6. (Конвей) Написано через запятую несколько натуральных чисел. За один ход можно уменьшить одно из чисел, если остался 0, то все числа правее вычёркиваются. Запрещается уменьшать до нуля самое левое число, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает в позиции $(2, 4, 2, 1)$?

Игра может и не заканчиваться за конечное время.

7. Докажите, что в крестиках-ноликах на бесконечной доске у второго игрока нет выигрышной стратегии.

Игра в нормальной форме — это множество игроков, множество стратегий для каждого игрока, и функция, переводящая набор стратегий игроков в набор выигрышей. При этом считается, что игроки выбирают свои стратегии одновременно и не зная ничего о выборе другого игрока.

Примеры:

“Встреча”: 2 игрока, по 2 стратегии (2 места встречи), оба выигрывают 1, если встретились.

“Угадывание бита”: 2 игрока, по 2 стратегии (0 и 1), второй выигрывает 1 у первого, если угадал.

“Дилемма заключённых”: 2 игрока, каждый может добавить себе к выигрышу 1 или другому 2.

“Делёж фигуры”: n игроков выбирают по точке в фигуре, выигрыш каждого — длина или площадь множества точек, к которым он сходил ближе всех прочих игроков.

8. Представьте “крестики-нолики” как игру в нормальной форме.

Равновесие Нэша — это такой набор стратегий, что быть единственным отклонившимся от него игроку не лучше, чем играть в соответствии с ним.

9. Найдите все равновесия Нэша в играх “встреча”, “угадывание бита”, “дилемма заключённых”, “делёж отрезка” ($n = 2, 3$), “делёж круга” ($n = 2, 3$), “делёж прямой (счётное число игроков)”.

Стратегия игрока (*нестрого*) *доминируемая*, если существует другая стратегия, дающая больший (не меньший) выигрыш при любых стратегиях других игроков.

10. Доминируемая стратегия не входит в равновесие Нэша.

11. Если из конечной игры по одной выкидывать доминируемые стратегии, результат не зависит от порядка выкидывания. Постройте пример, когда это не так для нестрого доминируемых.

Пусть игра задана ориентированным ациклическим графом позиций, в котором для каждого листа задан выигрыш в нём. Равновесие Нэша называется *совершенным на подыграх*, если ограничение стратегий на игру с началом в любой вершине графа тоже задаёт равновесие Нэша.

12. Есть ли в “крестиках-ноликах” равновесие, совершенное на подыграх? Все ли равновесия таковы? Как описать все равновесия? Есть ли среди них равновесие, предписывающее крестикам хотя бы в одной ситуации единственный проигрышный ход? Совершенно ли оно на подыграх?

13. Два игрока. Сначала первый решает, начинать ли ему игру, если нет — выигрыши по 0. Если первый вступает в игру, второй может ответить агрессивно (выигрыши по -2) или мирно (выигрыш первого 1, второго -1). Найти все равновесия Нэша, выделить среди них совершенные на подыграх.