Просеминар по математической логике и теории алгоритмов
`http://proseminar.math.ru`

Игры и стратегии - 2

Определение

Пусть задана игра в нормальной форме. Смешанной стратегией для игрока m называется распределение вероятностей на его множестве стратегий S_m. Элементы S_m при этом называются *чистыми стратегиями* и отождествляются с распределениями вероятностей, при которых они имеют вероятность 1. При этом подразумевается, что каждый игрок выбирает свой ход случайно и независимо от других с распределением вероятностей, заданным его смешанной стратегией. Если для каждого игрока задана смешанная стратегия, то выигрышем игрока при данном наборе смешанных стратегий называется математическое ожидание его выигрыша при случайных независимых ходах всех игроков, распределённых в соответствии с заданными смешанными стратегиями.

Определение

По каждой игре в нормальной форме с конечными (для бесконечных всё так же, но появляются тонкости в определении, которыми мы заниматься не будем) множествами игроков и стратегий для каждого игрока естественным образом строится игра в нормальной форме, стратегиями в которой являются смешанные стратегии. Равновесие Нэша в исходной игре будем называть также "равновесие в чистых стратегиях", а в новой - "смешанное равновесие Нэша" ("равновесие Нэша в смешанных стратегиях").

1. Найдите равновесия Нэша в смешанных стратегиях в играх "угадывание бита", "встреча".

2. "Работа и проверка". Есть работодатель и работники. Работник может работать старательно или плохо. Работодатель может проверить работника. От каждого хорошо работающего работника работодатель приобретает выигрыш 10, от плохо работающего — только 4. Если работник работает хорошо, он в любом случае получает выигрыш 8. Если работать плохо и не быть проверенным, то выигрыш будет 10, но в случае проверки выигрыш работника будет лишь 4.
а) Работник один, работодатель может его проверять или нет. Какие есть чистые и смешанные равновесия Нэша?
б) Работников двое, работодатель может проверить только одного из них. Найдите чистые и смешанные равновесия Нэша.

3. Рассмотрим симметричную игру, заданную следующей таблицей:

$8,8$	$6,16$	$5,2$	$7,10$
$16,6$	$15,15$	$13,4$	$14,12$
$2,5$	$4,13$	$3,3$	$1,11$
$10,7$	$12,14$	$11,1$	$9,9$

Игроков два, первый выбирает столбец, второй строку. Первое число в клетке задаёт выигрыш первого, второе число — выигрыш второго.
а) Найдите все равновесия Нэша;
б) Найдите все равновесия Нэша, если один из игроков минимизирует свой выигрыш;
в) Найдите все равновесия Нэша, если оба игрока минимизируют свой выигрыш;
г) Найдите все равновесия Нэша, если каждый игрок максимизирует сумму выигрышей игроков;
д) Существует ли хотя бы одно смешанное равновесие Нэша, не являющееся равновесием в чистых стратегиях?

4. Найдите все равновесия Нэша в дилемме заключённых. Найдите все равновесия Нэша в дилемме заключённых, если один из игроков или оба игрока минимизируют свой выигрыш, а не максимизируют.

5. Меняется ли множество смешанных равновесий Нэша при выкидывании строго доминируемых стратегий? Нестрого доминируемых стратегий?

6. Если в игре есть смешанное равновесие Нэша, то все чистые стратегии, входящие в смешанную стратегию игрока с ненулевыми весами, дают один и тот же выигрыш, равный выигрышу от смешанной стратегии.

7. Верно ли, что если в игре есть равновесие Нэша в чистых стратегиях, то оно является смешанным равновесием Нэша? Верно ли, что если в игре есть равновесие Нэша для чистых стратегий, то во все смешанные равновесия Нэша входят с ненулевыми вероятностями только стратегии, входящие хотя бы в одно равновесие Нэша в чистых стратегиях? Верно ли, что строго доминируемые стратегии не могут входить с ненулевыми вероятностями в смешанное равновесие Нэша? Верно ли это для нестрого доминируемых стратегий?

8. “Повторяемая дилемма заключённых”. Пусть два игрока играют в “дилемму” бесконечно много раз подряд, причём каждый раз ставки падают на 1 процент. Тогда для любой пары стратегий игроков ряд выигрышей сходится, и можно задать бесконечную игру в развёрнутой форме. Докажите, что в ней есть равновесие Нэша, совершенное на подыграх, при розыгрыше которого оба игрока всегда помогают друг другу (“кооперативная” стратегия в дилемме заключённых).

9. Можно ли достичь того же результата путём конечного многократного повторения фиксированное число раз?

Существование равновесий

Определение
Множество X - компакт, если из любого покрытия X открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. В $\mathbb{R}^n$ это означает, что множество замкнуто и ограничено.

Теорема Брауэра: Непрерывное отображение выпуклого компакта в конечномерном пространстве в себя имеет неподвижную точку.

Определение

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество множества $X \times Y$, или, что то же самое, отображение из X в множество подмножеств Y. Соответствие между топологическими пространствами называется замкнутым, если оно замкнуто как подмножество $X \times Y$.

10. Докажите, что в выпуклом компакте для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, то есть конечное множество точек, таких что каждая точка компакта удалена от одной из них не более, чем на ε.

11. (Теорема Какутани) Пусть X — выпуклый компакт. Пусть F — замкнутое соответствие между X и X и образ каждой точки непустой и выпуклый. Тогда существует точка x_*, соответствующая сама себе.

Указание

Рассмотрите некоторую ε-сеть x_i, некоторые точки $y_i \in F(x_i)$ и отображение $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_i y_i max(0, \varepsilon - \rho(x, x_i))$. Обратите внимание, что образ — конечномерное подмножество.

12. (Теорема Нэша) а) Докажите, что если множества стратегий игроков - выпуклые и компактные, а функции выигрыша непрерывные по всем переменным и выпуклые вверх по своей стратегии игрока, то существует равновесие Нэша;

б) Докажите, что при конечном числе чистых стратегий существует смешанное равновесие Нэша.

Определение
Пусть есть конечный набор возможных решений (исходов).

Системой предпочтений назовём упорядочение этих решений.

Голосованием назовём детерминированный процесс, который из набора систем предпочтений в обществе создаёт коллективную систему предпочтений. Оно не обязано давать один тот же результат при перестановках предпочтений между голосующими.

Голосование называется эффективным по Парето, если из того, что все голосующие ставят A выше B, следует, что в коллективной системе предпочтений A тоже будет выше B.

Голосование назовём устойчивым к мнимым вариантам, если результат сравнения A и B в результирующей системе предпочтений зависит только от их относительной предпочтительности в системах предпочтений голосующих.

13. Докажите, что если при голосовании с тремя исходами все ставят один из исходов (X) либо на первое, либо на третье место, то этот исход не может получить в результате второе место.

14. Докажите, что при голосовании с тремя исходами есть игрок, который в какой-то ситуации выбирает, будет ли некоторый результат лучшим или худшим.

15. Докажите, что этот игрок может добиться любого упорядочивания оставшихся двух исходов.

Указание
Для этого контролируемый исход следует поставить вторым. Сначала надо рассмотреть ситуацию, где все голосуют как при переходе X с первого места на последнее.

16. Докажите, что этот же игрок может добиться любого упорядочивания вообще.

Указание
Есть какие-то игроки диктующие порядок между тремя парами. Но они не могут не совпадать.

17. Эффективное по Парето устойчивое к мнимым вариантам голосование учитывает только мнение одного голосующего (диктатора).

Определение
Игра "бессмысленное голосование". Нечётное число игроков (обычно три) голосуют по вопросу, получить ли им всем одновременно полезность 1 или остаться с выигрышем 0.

Определение
Особенно любопытной будет эта игра, если назначить за голосование, отличное от мнения большинства штраф величиной $\frac{1}{10}$. Это, кстати, иногда описывает ситуацию при открытом голосовании.

18. Найдите все равновесия Нэша в бессмысленном голосовании.

Определение
Коллективная смешанная (коррелированная) стратегия в игре в нормальной форме — это распределение вероятностей на наборах стратегий (по одной в наборе для каждого игрока). Если игроки используют коллективную смешанную стратегию, то специальное устройство вероятностно вырабатывает стратегии и сообщает каждому игроку его рекомендованную стратегию. Выигрыш в данном случае найти даже проще, чем при использовании смешанных стратегий, так как нам не надо перемножать вероятности выборов стратегий каждым игроком для определения вероятности исхода.

Коллективная смешанная стратегия Σ называется равновесной, если для любых игрока и его стратегии s максимум математического ожидания выигрыша игрока при условии, что выбор в соответствии с Σ рекомендует ему s и другие игроки следуют рекомендациям, достигается на s (и, возможно, каких-то других стратегиях).

Это определение, на самом деле, очень близко к определению равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Игра
"Встреча на лыжне". Два лыжника едут по лыжне навстречу друг другу. Каждый может уступить или нет. Если оба уступают, то выигрыши по 2 единицы полезности. Если ни один не уступает, то они сталкиваются, чему мы припишем полезность -1. Иначе уступивший получает полезность 0, а второй полезность 3.

19. Найдите все чистые равновесия Нэша при встрече на лыжне.

20. Найдите все смешанные равновесия Нэша при встрече на лыжне.

21. Постройте симметричную равновесную коллективную смешанную стратегию для встречи на лыжне, которая
а) лучше, чем симметричное смешанное равновесие Нэша;
б) лучше, чем симметричное смешанное равновесие и обеспечивает максимальную (для симметричной равновесной стратегии) вероятность исхода, когда оба уступают.