

Игры и стратегии - 3. Коалиции

Определение.

Игра в коалиционной форме задаётся множеством игроков и функцией, которая по коалиции — подмножеству множества игроков — сообщает множество наборов выигрышей, которые может обеспечить данная коалиция своим членам.

Исход игры — разбиение игроков на коалиции с указанием выигрышей игроков. Для каждой реализованной коалиции набор выигрышей игроков должен лежать в образе коалиции (то есть быть разрешённым).

Исход называется доминируемым, если существует коалиция, которая обеспечивает всем своим участникам выигрыш строго больший, чем выигрыш при рассматриваемом исходе.

Ядром игры называется множество всех недоминируемых исходов.

Считается, что игроки всегда могут уменьшать свой выигрыш.

Обратите внимание, что выигрыш коалиции не зависит от действий не входящих в неё игроков.

Определение.

Пример: “Дележ сокровища”. Три игрока делят мешок золота и должны утвердить раздел голосованием.

1. Какое ядро у дележа сокровища?
2. Пусть в игре все члены каждой коалиции делят выигрыш поровну. Докажите, что ядро этой игры непусто.

Определение.

Смешанный коалиционный исход задаётся весами коалиций и выигрышами. При этом требуется:

- 1) Для каждого игрока сумма весов коалиций, в которых он участвует, равна 1.
- 2) Каждая коалиция с положительным весом выбирает допустимый набор выигрышей своих участников и выплачивает его, умножив на свой вес.
- 3) Ни одна из коалиций не может обеспечить сразу всем своим участникам строго больше, чем в этом исходе.

Определение.

В игре “разрешена передача полезности”, если всякий игрок может уменьшить свой выигрыш для того, чтобы на ту же величину увеличить выигрыш заданного игрока.

Замечание.

Игроку полезно это делать, если чуть менее эффективный исход для другого

игрока даёт большую отдачу ему.

Полезная переформулировка: каждая коалиция имеет некоторый доход, который делит по своему усмотрению. Обозначим доход коалиции K как $p(K)$.

3. Пусть есть ориентированный граф (граф маршрутов перевозок) с пропускными способностями рёбер, выделенным источником и стоком. Каждый игрок контролирует одно ребро; коалиция как угодно распределяет выигрыш, равный пропускной способности графа из контролируемых ею рёбер при перевозках из источника в сток (то есть коалиция оказывает транспортные услуги и как-то делит выигрыш между участниками). Найдите ядро этой игры.

Указание.

Воспользуйтесь теоремой Форда-Фалкерсона о равенстве максимального потока и минимального разреза.

Определение.

Пусть дана коалиционная игра с передачей полезности и упорядочение игроков. Тогда можно рассмотреть вектор изменения выигрыша коалиции от добавления игроков в данном порядке. Другими словами, $x_k = p(\{1, \dots, k\}) - p(\{1, \dots, k-1\})$.

Вектор Шепли — среднее всех $n!$ таких векторов.

4. Вектор Шепли - единственный симметричный линейный оператор $\mathbb{R}^{2^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, такой что игрок, добавление которого никогда не меняет выигрыш коалиции, получит 0 и сумма координат образа равна выигрышу коалиции всех игроков.