

Теория игр

Игра в нормальной форме — это множество игроков, множество стратегий для каждого игрока, и функция, переводящая набор стратегий игроков в набор выигрышей.

“Встреча”: 2 игрока, по 2 стратегии (2 места встречи), оба выигрывают 1, если встретились.

“Угадывание бита”: 2 игрока, по 2 стратегии (0 и 1), второй выигрывает 1 у первого, если угадал.

“Дилемма заключённых”: 2 игрока, каждый может добавить себе к выигрышу 1 или другому 2.

“Делёж фигуры”: n игроков выбирают по точке в фигуре, выигрыш каждого — длина или площадь множества точек, к которым он сходил ближе всех прочих игроков.

1. Представьте “крестики-нолики” как игру в нормальной форме.

Равновесие Нэша — это такой набор стратегий, что быть единственным отклонившимся от него игроку не лучше, чем играть в соответствии с ним.

2. Найдите все равновесия Нэша в играх “встреча”, “угадывание бита”, “дилемма заключённых”, “делёж отрезка” ($n = 2, 3$), “делёж круга” ($n = 2, 3$), “делёж прямой (счётное число игроков)”.

Стратегия игрока (*не строго*) *доминируемая*, если существует другая стратегия, дающая больший (не меньший) выигрыш при любых стратегиях других игроков.

3. Доминируемая стратегия не входит в равновесие Нэша.

4. Если из конечной игры по одной выкидывать доминируемые стратегии, результат не зависит от порядка выкидывания. Постройте пример, когда это не так для не строго доминируемых.

5. Решите по доминированию игры, в которых искали равновесия Нэша.

6. При решении игры по доминированию множество равновесий Нэша не меняется.

7. Рассмотрим симметричную игру, заданную следующей таблицей:

8, 8	6, 16	5, 2	7, 10
16, 6	15, 15	13, 4	14, 12
2, 5	4, 13	3, 3	1, 11
10, 7	12, 14	11, 1	9, 9

Игроков два, первый выбирает столбец, второй строку. Первое число в клетке задаёт выигрыш первого, второе число — выигрыш второго. Найдите все равновесия Нэша в случаях, когда каждый из игроков максимизирует или минимизирует свой выигрыш или сумму выигрышей игроков.

8. Верно ли, что если увеличить выигрыш одного игрока при некотором наборе стратегий, то максимум его выигрышей в равновесиях Нэша не уменьшится?

Пусть игра задана ориентированным ациклическим графом позиций, в котором для каждого листа задан выигрыш в нём. Равновесие Нэша называется *совершенным на подыграх*, если ограничение стратегий на игру с началом в любой вершине графа тоже задаёт равновесие Нэша.

9. Есть ли в “крестиках-ноликах” равновесие, совершенное на подыграх? Все ли равновесия таковы? Как описать все равновесия? Есть ли среди них равновесие, предписывающее крестикам хотя бы в одной ситуации единственный проигрышный ход? Совершенно ли оно на подыграх?

10. Два игрока. Сначала первый решает, начинать ли ему игру, если нет — выигрыши по 0. Если первый вступает в игру, второй может ответить агрессивно (выигрыши по -2) или мирно (выигрыш первого 1, второго -1). Найдите все равновесия Нэша, выделить среди них совершенные на подыграх.