

## Игры и стратегии

1. На крайней нижней и крайней верхней горизонталях доски  $3 \times 3$  стоят 3 белые и 3 чёрные пешки соответственно. Пешки ходят по обычным правилам, но нельзя делать первый ход сразу на две клетки и, соответственно, брать пешку “на проходе”. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает; сумевший провести пешку на противоположный край доски. У какого игрока есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?
2. *Игра Баше*. На столе лежат 15 спичек. Двое по очереди берут от 1 до 3 спичек. Выигрывает взявший последнюю спичку. У какого игрока есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?
3. На шахматной доске стоит **а)** ладья; **б)** король; **в)** ферзь; **г)** конь. Игроки по очереди двигают эту фигуру по обычному правилу, при этом ходить влево и вниз запрещается. Проигрывает игрок, который не может сделать хода. При каких начальных позициях фигуры у первого игрока есть выигрышная стратегия? А при каких у второго?
4. *Ним с равными кучками*. Имеется три одинаковые кучки камней. Двое ходят по очереди. Каждый может либо взять несколько (возможно, все) камней, но обязательно из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. У кого из игроков есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?
5. *Игра Витхоффа*. Имеется две кучки, в первой 8 камней, во второй 9. Двое ходят по очереди. Каждый может либо взять несколько (возможно, все) камней из одной кучки, либо взять одинаковое число камней из обеих кучек. Выигрывает взявший последний камень. У кого из игроков есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?
6. *Игра Гранди*. **а)** На столе лежит куча из 6 камней. Два игрока ходят по очереди. Своим ходом каждый игрок может разделить любую кучку камней на две кучки разного размера. Игра заканчивается, когда остаются только кучки из двух или одного камня (такую кучку нельзя разделить в соответствии с правилами). Выигрывает сделавший последний ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия и в чём она заключается? **б)** А как определить, кто из игроков выиграет, если изначально в куче было  $n$  камней?
7. Дан конечный ориентированный граф без циклов. В одной из вершин графа находится фишка. Двое по очереди передвигают фишку по рёбрам графа (в правильном направлении). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. **а)** Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия. **б)** Для каждой вершины  $x$  пусть  $G(x)$  — множество вершин, в которые ведут рёбра из  $x$ . Определим на множестве вершин функцию Шпрага – Гранди следующим образом:  $F(x) = 0$ , если  $G(x)$  пусто; в остальных случаях  $F(x)$  есть наименьшее натуральное число, не входящее в множество  $\{F(y) \mid y \in G(x)\}$ . (Ноль мы считаем натуральным числом.) Докажите, что такое определение корректно. Докажите, что если в начале игры фишка стоит в вершине  $x$ , то у первого игрока есть выигрышная стратегия в том и только в том случае, когда  $F(x) \neq 0$ . Опишите эту стратегию.
8. Пусть дано  $n$  графов  $G_1, \dots, G_n$ . Определим граф  $G_1 + \dots + G_n$  (сумму игр) следующим образом: его вершинами будут наборы  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , где  $x_i$  — вершина  $G_i$ ; вершины  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  и  $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$  соединены ребром тогда и только тогда, когда для некоторого  $i_0$  вершины  $x_{i_0}$  и  $y_{i_0}$  соединены ребром в графе  $G_{i_0}$ , а для  $i \neq i_0$  (всех остальных)  $y_i = x_i$ . (В терминах суммы игр — на каждом ходу игрок выбирает одну из игр  $G_{i_0}$  и совершает в ней ход; позиции в остальных играх неизменны.) Докажите, что функция Шпрага – Гранди для графа  $G_1 + \dots + G_n$  задаётся формулой  $F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \oplus \dots \oplus F(x_n)$ , где  $t \oplus n$  — результат поразрядного сложения по модулю два чисел  $t$  и  $n$  (в двоичной записи).
9. *Ним (общий случай)*. Имеется три кучки камней — в первой  $k$ , во второй  $n$ , в третьей  $m$ . Каждый может либо взять несколько (возможно, все) камней, но обязательно из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. У кого из игроков есть выигрышная стратегия и в чём она заключается?