

Порождающие грамматики

Множество всех конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^* . Пустое слово обозначается Λ . Язык над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^* .

Если w — слово, а n — натуральное число, то через w^n обозначается слово, полученное n -кратным повторением слова w . Обращением слова w (обозначается w^R) называется слово, в котором символы, составляющие слово w , идут в обратном порядке. Например, $(abcaab)^R = baacba$.

Каждая порождающая грамматика состоит из конечного алфавита вспомогательных символов N , среди которых один символ выделен и называется начальным символом, конечного алфавита терминальных символов Σ и конечного множества правил вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β — слова в алфавите $N \cup \Sigma$. Будем обозначать терминальные символы строчными буквами из начала латинского алфавита, а вспомогательные символы — заглавными латинскими буквами. Правила будем записывать в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ.

Выводом в порождающей грамматике называется последовательность слов в алфавите $N \cup \Sigma$, в которой первое слово состоит из одного символа и этот символ начальный, а каждое последующее слово получено из предыдущего заменой некоторого подслова (то есть непрерывного куска) по одному из правил грамматики. Про последнее слово вывода говорят, что оно *выводится* в данной грамматике.

1. Рассмотрим грамматику $R \rightarrow TR, R \rightarrow a, T \rightarrow R, TT \rightarrow TbR$. Является ли выводом последовательность а) $R \Rightarrow TR \Rightarrow TTR \Rightarrow TbRR \Rightarrow TbaR \Rightarrow RbaR \Rightarrow abaR \Rightarrow abaa$? б) $R \Rightarrow a$? в) $TT \Rightarrow TbR \Rightarrow Tba \Rightarrow Rba \Rightarrow aba$?

2. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow aSb, S \rightarrow T, T \rightarrow cTd, T \rightarrow \Lambda$ слово а) $aaaccddbbb$? б) $aacdb$? в) $ccdd$? г) $aabb$? д) $acabdb$? е) Λ ? ж) $abcd$?

3. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow Sb, S \rightarrow ST, S \rightarrow SU, S \rightarrow \Lambda, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow ab, Uaaa \rightarrow aaU, Uab \rightarrow b$ слово а) bb ? б) ab ? в) aaa ? г) $aaaab$? д) aaa ? е) aab ? ж) $aaaaaab$?

Язык, порождаемый данной грамматикой, состоит из всех слов в терминальном алфавите, которые выводятся в этой грамматике.

4. Описать язык, порождаемый грамматикой а) $S \rightarrow FF, F \rightarrow aFb, F \rightarrow ab$; б) $S \rightarrow DSD, S \rightarrow c, D \rightarrow a, D \rightarrow b, D \rightarrow c$; в) $S \rightarrow aUS, S \rightarrow bVS, S \rightarrow T, Ua \rightarrow aU, Ub \rightarrow bU, Va \rightarrow aV, Vb \rightarrow bV, UT \rightarrow Ta, VT \rightarrow Tb, T \rightarrow \Lambda$; г) $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$; д) $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aTT, Tb \rightarrow bb$; е) $S \rightarrow aTS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaTT, Tb \rightarrow b$; ж) $S \rightarrow CS, S \rightarrow TR, CT \rightarrow TTC, CR \rightarrow TR, R \rightarrow Tab, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$;

Грамматика называется *контекстно-свободной*, если в каждом правиле в левой части один символ и этот символ вспомогательный. Например, грамматики из задач 2 и 4а являются контекстно-свободными, а грамматики из задач 1 и 3 — нет.

5. Найти контекстно-свободную грамматику, порождающую язык а) $\{a^m b^n c^k : m \geq 1, n \geq 2, k \geq 3\}$; б) $\{a^m b^n : 0 \leq m < n\}$; в) $\{a^m b^n c^k : k = m + n\}$; г) $\{a^m b^n c^k : k \neq m + n\}$; д) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$; е) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$; ж) $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v\}$; з) $\{(aab)^n a (aba)^n c (bba)^n : n > 0\}$.

Две грамматики называются *эквивалентными*, если они порождают один и тот же язык.

6. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow abS, S \rightarrow a$ и грамматика $T \rightarrow aU, U \rightarrow baU, U \rightarrow \Lambda$?

7. Какие из следующих грамматик эквивалентны: а) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab$, б) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow \Lambda$, в) $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSSb, S \rightarrow \Lambda$, г) $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \Lambda$, д) $S \rightarrow SaSb, S \rightarrow \Lambda$, е) $S \rightarrow SaSbS, S \rightarrow SbSaS, S \rightarrow \Lambda$, ж) $S \rightarrow aR, R \rightarrow aRR, R \rightarrow b$?

8. Какие из следующих грамматик эквивалентны: а) $T \rightarrow abbT, T \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab$, б) $R \rightarrow Rabb, R \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab$, в) $S \rightarrow aSbSbS, S \rightarrow \Lambda$, г) $U \rightarrow UaUbUb, U \rightarrow \Lambda$, д) $U \rightarrow UabUb, U \rightarrow \Lambda$?

9. Эквивалентны ли грамматика $B \rightarrow b, B \rightarrow aBCB, C \rightarrow c, C \rightarrow aCBC$ и грамматика $S \rightarrow abcS, S \rightarrow b, ba \rightarrow ab, ca \rightarrow ac$?