

Порождающие грамматики

Множество всех конечных слов в алфавите Σ обозначается Σ^* . Пустое слово обозначается Λ . Язык над алфавитом Σ — это произвольное подмножество множества Σ^* .

Если w — слово, а n — натуральное число, то через w^n обозначается слово, полученное n -кратным повторением слова w . Обращением слова w (обозначается w^R) называется слово, в котором символы, составляющие слово w , идут в обратном порядке. Например, $(abcaab)^R = baacba$.

Каждая порождающая грамматика состоит из конечного алфавита вспомогательных символов N , среди которых один символ выделен и называется начальным символом, конечного алфавита терминальных символов Σ и конечного множества правил вида $\alpha \rightarrow \beta$, где α и β — слова в алфавите $N \cup \Sigma$. Будем обозначать терминальные символы строчными буквами из начала латинского алфавита, а вспомогательные символы — заглавными латинскими буквами. Правила будем записывать в таком порядке, что левая часть первого правила есть начальный символ.

Выводом в порождающей грамматике называется последовательность слов в алфавите $N \cup \Sigma$, в которой первое слово состоит из одного символа и этот символ начальный, а каждое последующее слово получено из предыдущего заменой некоторого подслова (то есть непрерывного куска) по одному из правил грамматики. Про последнее слово вывода говорят, что оно *выводится* в данной грамматике.

1. Рассмотрим грамматику $R \rightarrow TR, R \rightarrow a, T \rightarrow R, TT \rightarrow TbR$. Является ли выводом последовательность **а)** $R \Rightarrow TR \Rightarrow TTR \Rightarrow TbRR \Rightarrow TbaR \Rightarrow RbaR \Rightarrow abaR \Rightarrow abaa?$ **б)** $R \Rightarrow a?$ **в)** $TT \Rightarrow TbR \Rightarrow Tba \Rightarrow Rba \Rightarrow aba?$

2. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow aSb, S \rightarrow T, T \rightarrow cTd, T \rightarrow \Lambda$ слово **а)** $aaacddbbb?$ **б)** $aacdb?$ **в)** $ccddd?$ **г)** $aabb?$ **д)** $acabdb?$ **е)** $\Lambda?$ **ж)** $abcd?$

3. Выводится ли в грамматике $S \rightarrow Sb, S \rightarrow ST, S \rightarrow SU, S \rightarrow \Lambda, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow ab, Uaaa \rightarrow aaU, Uab \rightarrow b$ слово **а)** $bb?$ **б)** $ab?$ **в)** $aaab?$ **г)** $aaaaab?$ **д)** $aaa?$ **е)** $aab?$ **ж)** $aaaaaab?$

Язык, порождаемый данной грамматикой, состоит из всех слов в терминальном алфавите, которые выводятся в этой грамматике.

4. Описать язык, порождаемый грамматикой **а)** $S \rightarrow FF, F \rightarrow aFb, F \rightarrow ab$; **б)** $S \rightarrow DSD, S \rightarrow c, D \rightarrow a, D \rightarrow b, D \rightarrow c$; **в)** $S \rightarrow aUS, S \rightarrow bVS, S \rightarrow T, Ua \rightarrow aU, Ub \rightarrow bU, Va \rightarrow aV, Vb \rightarrow bV, UT \rightarrow Ta, VT \rightarrow Tb, T \rightarrow \Lambda$; **г)** $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$; **д)** $S \rightarrow TaS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aTT, Tb \rightarrow bb$; **е)** $S \rightarrow aTS, S \rightarrow b, Ta \rightarrow aaTT, Tb \rightarrow b$; **ж)** $S \rightarrow CS, S \rightarrow TR, CT \rightarrow TTC, CR \rightarrow TR, R \rightarrow Tab, Ta \rightarrow aaT, Tb \rightarrow bb$;

Грамматика называется *контекстно-свободной*, если в каждом правиле в левой части один символ и этот символ вспомогательный. Например, грамматики из задач 2 и 4а являются контекстно-свободными, а грамматики из задач 1 и 3 — нет.

5. Найти контекстно-свободную грамматику, порождающую язык **а)** $\{a^m b^n c^k : m \geq 1, n \geq 2, k \geq 3\}$; **б)** $\{a^m b^n : 0 \leq m < n\}$; **в)** $\{a^m b^n c^k : k = m + n\}$; **г)** $\{a^m b^n c^k : k \neq m + n\}$; **д)** $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u = v^R\}$; **е)** $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$; **ж)** $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u \neq v\}$; **з)** $\{(aab)^n a (aba)^n c (bba)^n : n > 0\}$.

Две грамматики называются *эквивалентными*, если они порождают один и тот же язык.

6. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow abS, S \rightarrow a$ и грамматика $T \rightarrow aU, U \rightarrow baU, U \rightarrow \Lambda$?

7. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab$, **б)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSb, S \rightarrow \Lambda$, **в)** $S \rightarrow SS, S \rightarrow aSSb, S \rightarrow \Lambda$, **г)** $S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \Lambda$, **д)** $S \rightarrow SaSb, S \rightarrow \Lambda$, **е)** $S \rightarrow SaSbS, S \rightarrow SbSaS, S \rightarrow \Lambda$, **ж)** $S \rightarrow aR, R \rightarrow aRR, R \rightarrow b$?

8. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $T \rightarrow abbT, T \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab$, **б)** $R \rightarrow Rabb, R \rightarrow \Lambda, ba \rightarrow ab$, **в)** $S \rightarrow aSbSbS, S \rightarrow \Lambda$, **г)** $U \rightarrow UaUbUb, U \rightarrow \Lambda$, **д)** $U \rightarrow UabUb, U \rightarrow \Lambda$?

9. Эквивалентны ли грамматика $B \rightarrow b, B \rightarrow aBCB, C \rightarrow c, C \rightarrow aCBC$ и грамматика $S \rightarrow abcS, S \rightarrow b, ba \rightarrow ab, ca \rightarrow ac$?

Порождающие грамматики (продолжение)

Длина слова x обозначается $|x|$. Количество вхождений символа a в слово x обозначается $|x|_a$. Назовём *длиной* правила $\alpha \rightarrow \beta$ число $|\alpha| + |\beta|$. Назовём *длиной* грамматики сумму длин всех её правил.

10. Существует ли грамматика длины 20, порождающая язык $\{a^n b^n a^n b^n : n > 0\}$?
11. Существует ли такое слово x , что $|x| > 4000$ и язык $\{x\}$ порождается некоторой контекстно-свободной грамматикой длины 30?
Язык называется *контекстно-свободным*, если он порождается некоторой контекстно-свободной грамматикой.
12. Существует ли такой контекстно-свободный язык L , что $\Lambda \notin L$ и язык L не порождается никакой контекстно-свободной грамматикой без правил с пустой правой частью?
13. Пусть некоторая контекстно-свободная грамматика содержит 9 вспомогательных символов и каждое правило имеет длину 2 или 3. Пусть в этой грамматике выводится слово w , причём $|w| > 2000$. Доказать, что найдутся такие слова u, v, x, y, z , для которых верно $uvxyz = w$, $vy \neq \Lambda$ (то есть $v \neq \Lambda$ или $y \neq \Lambda$) и для всех $i \geq 0$ слово $uv^i xy^i z$ выводится в рассматриваемой грамматике.
14. Доказать то же с дополнительным требованием $|vxy| < 2000$.
15. Является ли контекстно-свободным язык **а)** $\{a^n b^n c^n : n > 0\}$; **б)** $\{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$; **в)** $\{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b\}$; **г)** $\{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$; **д)** $\{ucv : u, v \in \{a, b\}^*, u = v\}$; **е)** $\{a^m b^n c^k : 0 < m < n < k\}$; **ж)** $\{a^n b t b a^m \mid t \in \{a, b\}^*, |t|_a = n + m\}$; **з)** $\{a, b\}^* \setminus \{tt \mid t \in \{a, b\}^*\}$?
16. Найти грамматику с 3 правилами, порождающую язык $\{a^m b^n \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$.
17. Найти грамматику с 6 правилами, порождающую язык $\{b^n a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.
18. Эквивалентны ли грамматика $K \rightarrow Fb, F \rightarrow \Lambda, F \rightarrow aFbF$ и грамматика $K \rightarrow b, K \rightarrow aKK$?
19. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow SaSbS, S \rightarrow c$ и грамматика $R \rightarrow cT, T \rightarrow acTbcT, T \rightarrow \Lambda$?
20. Эквивалентны ли грамматика $U \rightarrow VV, V \rightarrow bVa, V \rightarrow a$ и грамматика $S \rightarrow RT, R \rightarrow bRa, R \rightarrow T, T \rightarrow bTa, T \rightarrow a$?
21. Эквивалентны ли грамматика $S \rightarrow SabaS, S \rightarrow b$ и грамматика $T \rightarrow baTaT, T \rightarrow b$?
22. Какие из следующих грамматик эквивалентны: **а)** $S \rightarrow aT, T \rightarrow aTTa, T \rightarrow b$, **б)** $S \rightarrow aT, T \rightarrow aTTTa, T \rightarrow b$, **в)** $S \rightarrow aC, C \rightarrow aD, C \rightarrow b, D \rightarrow aDJ, D \rightarrow bJ, J \rightarrow aDK, J \rightarrow bK, K \rightarrow a$, **г)** $S \rightarrow aC, C \rightarrow aD, C \rightarrow b, D \rightarrow aE, D \rightarrow bJ, E \rightarrow aEJ, E \rightarrow bJJ, F \rightarrow aEK, F \rightarrow bJK, J \rightarrow aF, J \rightarrow bK, K \rightarrow a$?
23. Существует ли контекстно-свободная грамматика с пятью правилами, порождающая конечный язык над алфавитом $\{a, b\}$, содержащий ровно 98 слов?
24. Описать язык, порождаемый грамматикой $E \rightarrow \Lambda, E \rightarrow aCbE, E \rightarrow bDaE, E \rightarrow aF, F \rightarrow \Lambda, F \rightarrow aCbF, F \rightarrow aF, C \rightarrow \Lambda, C \rightarrow aCbC, D \rightarrow \Lambda, D \rightarrow bDaD$.